SECOND YEAR

III Semester

प्राविधिक शिक्षा परिषद्, उत्तर प्रदेश द्वारा स्वीकृत N.S.Q.F. के संशोधित पाठ्यक्रमानुसार

2019-2020

अनुप्रयुक्त गणित-तृतीय

(Applied Mathematics-III)

[illegible] Second Year (Third Semester) [illegible] Engineering Course

लेखक

प्रो० एच० आर० लूथरा
A.M.I.E. (Civil Engineering)
एम० एस-सी० (गणित)
प्रवक्ता (सेवानिवृत्त)
के० एल० पॉलिटैक्निक, रुड़की

शमशेर यादव
प्रवक्ता (गणित)
राजकीय पॉलिटैक्निक,
गोरखपुर

तेरहवाँ संशोधित संस्करण

प्रकाशक :

भारत भारती प्रकाशन एण्ड कं०
(प्रमुख पाठ्य-पुस्तक प्रकाशक)
वैस्टर्न कचहरी रोड, मेरठ-250001, उ०प्र०

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

विषय-सूची

अध्याय | **पृष्ठ संख्या**

खण्ड-1 : आव्यूह

1. आव्यूह या मैट्रिसिज़ (Matrices) ... 03-24
2. प्रारम्भिक पंक्ति/स्तम्भ रूपान्तरण (Elementry Row/Column Transformation) ... 25-44
3. आइगेन मान तथा कैले-हैमिल्टन प्रमेय (Eigen Values and Cayley-Hamilton Theorem) ... 45-60

खण्ड-2 : साधारण अवकल समीकरणें

4. प्रथम कोटि के अवकल समीकरण (Differential Equations of First Order) ... 63-83
5. उच्च क्रम के रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equations of Higher Order) ... 84-106
6. अवकल समीकरणों के सरल अनुप्रयोग (Simple Applications of Differential Equations) ... 107-118

खण्ड-3 : अवकल गणित

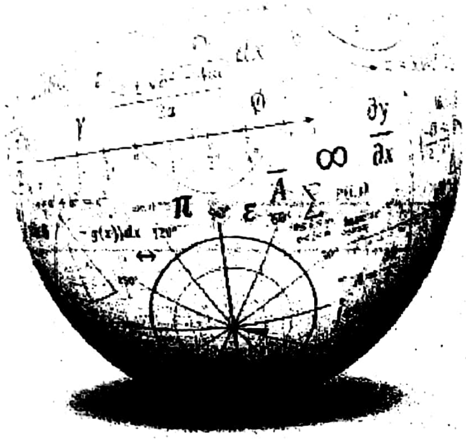
7. दो तथा तीन चरों के फलन तथा आकाश में पृष्ठों की पहचान (Functions of Two and Three Variables and Identification of Surfaces in Space) ... 121-124
8. आंशिक अवकलन (Partial Differentiation) ... 125-140
9. जैकोबियन (Jacobians) ... 141-157
10. सदिशों का अवकलन (Differentiation of Vectors) ... 158-164
11. ग्रेडियन्ट, डाइवर्जेन्स तथा कर्ल (Gradient, Divergence and Curl) ... 165-174
12. सदिशों का समाकलन (Integration of Vectors) ... 175-179
13. रेखा, पृष्ठ तथा आयतन समाकलन (Line, Surface and Volume Integrals) ... 180-192
14. ग्रीन, गौस तथा स्टोक के प्रमेय (Green, Gauss's and Stoke's Theorem) ... 193-204

खण्ड-4 : समाकलन गणित

15. लाप्लास (Laplace Transforms) ... 207-223
16. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर (Inverse Laplace Transforms) ... 224-243
17. बीटा और गामा फलन (Beta and Gamma Functions) ... 244-259
18. फोरियर रूपान्तर तथा फोरियर श्रेणी (Fourier Transforms and Fourier Series) ... 260-276

खण्ड-5 : प्रायिकता एवं सांख्यिकी

19. प्रायिकता (Probability) ... 279-292
20. द्विपद, प्रसामान्य तथा प्वॉयसन बंटन (Binomial, Normal and Poisson Distribution) ... 293-313
21. न्यूनतम वर्ग विधि एवं वक्र आसंजन (Method of Least Squares and Curve Fitting) ... 314-322
● परीक्षा प्रश्न-पत्र ... 323-324



www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

खण्ड-1

www.polytechnickhabar.in

आव्यूह
(MATRICES)

Scanned by CamScanner

1

आव्यूह या मैट्रिसिज़ (Matrices)

1. परिभाषा (Definition) :

$m \times n$ संख्याओं के निकाय (System) को m पंक्तियों तथा n स्तम्भों में व्यवस्थित करने पर प्राप्त लम्ब सारणी को $m \times n$ क्रम या कोटि का आव्यूह कहते हैं। इसे निम्न प्रकार से लिख जाता है—

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & a_{m_3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

a_{11}, a_{12} ...... इत्यादि आव्यूह के तत्व (elements) कहलाते हैं। a_{23} वह तत्व है जो आव्यूह की दूसरी पंक्ति तथा तीसरे स्तम्भ में स्थित है। हमेशा पहला अनुलग्न (Suffix) पंक्ति को तथा दूसरा अनुलग्न स्तम्भ को प्रदर्शित करता है। किसी अवयव को, जो आव्यूह की iवीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ में स्थित है, a_{ij} से निरूपित करते हैं।

2. आव्यूह का निरूपण (Representation of a Matrix) :

आव्यूहों को अंग्रेजी के बड़े अक्षरों A, B, C से प्रदर्शित करते हैं तथा आव्यूह के तत्वों को अंग्रेजी के छोटे अक्षरों a, b, c .... से प्रदर्शित करते हैं। इन तत्वों को घेरने के लिए अर्थात् लम्ब सारणी का रूप देने के लिए निम्न बैकिटों का प्रयोग करते हैं—

[ ] या ( ) या || ||

इस प्रकार किसी आव्यूह को निम्न में से किसी एक प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है—

$A = [a_{ij}]$ या $A = (a_{ij})$ या $A = \| a_{ij} \|$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, m$ (पंक्ति की संख्या)

$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ (स्तम्भ की संख्या)

3. आव्यूहों के प्रकार (Types of Matrices) :

(i) पंक्ति आव्यूह (Row Matrix)—यदि किसी आव्यूह में केवल एक ही पंक्ति है तो उसे पंक्ति आव्यूह कहते हैं।

$A = [3\ 2\ 7]$, 1×3 कोटि का पंक्ति आव्यूह है।

(ii) स्तम्भ आव्यूह (Column Matrix)—यदि किसी आव्यूह में केवल एक ही स्तम्भ है तो उसे स्तम्भ आव्यूह कहते हैं।

$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, 3×1 कोटि का स्तम्भ आव्यूह है।

(iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)—यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या बराबर है तो उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं। $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, 2×2 कोटि तथा $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है।

(iv) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrix)—यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तम्भों से कम है तो उसे क्षैतिज आव्यूह और यदि पंक्तियों की संख्या स्तम्भों से अधिक है तो उसे ऊर्ध्वाधर आव्यूह कहते हैं। जैसे—

www.polytechnichapar.in

Scanned by CamScanner

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ क्षैतिज आव्यूह है तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ ऊर्ध्वाधर आव्यूह है।

(v) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)—यदि किसी वर्ग आव्यूह में विकर्ण के तत्वों को छोड़ कर शेष सभी तत्व शून्य हों तो उसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं। जैसे :

$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ वर्ग आव्यूह है। इसे (6, – 3, 1) प्रकार से भी लिख सकते हैं।

यदि विकर्ण आव्यूह में विकर्ण के सभी तत्व बराबर हों तो उसे अदिश आव्यूह (Scalar matrix) कहते हैं।

(vi) इकाई या तत्समक आव्यूह (Unit Matrix)—ऐसा वर्ग आव्यूह, जिसके विकर्ण के सभी तत्व इकाई के बराबर हों तथा शेष सभी तत्व शून्य हैं, इकाई आव्यूह कहलाता है। इकाई आव्यूह को I_n से प्रदर्शित करते हैं जहाँ n, आव्यूह की कोटि है।

$$I_1 = [1]; \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(vi) शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix)—ऐसा आव्यूह, जिसका प्रत्येक तत्व शून्य है, शून्य या रिक्त आव्यूह कहलाता है। जैसे :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(vii) उप-आव्यूह (Sub-Matrix)—दिए हुए आव्यूह में से कुछ पंक्तियाँ या स्तम्भ या दोनों को छोड़ देने पर, प्राप्त आव्यूह को उप-आव्यूह कहते हैं। अन्य प्रकार के आव्यूह अनुच्छेद 4 में दिए गए हैं।

(viii) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix)—यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य विकर्ण के ऊपर अथवा नीचे के सभी अवयव शून्य हों तो वह आव्यूह, त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है।

(ix) उच्च तथा निम्न त्रिभुजीय आव्यूह (Upper and lower Triangular Matrix)—यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य वर्ग के नीचे के सभी आव्यूह शून्य हैं तो वह उच्च त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है, और यदि ऊपर के सभी अवयव शून्य हैं तो वह निम्न त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है।

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

उच्च त्रिभुजीय आव्यूह　　　　निम्न त्रिभुजीय आव्यूह

4. आव्यूह पर संक्रियाएँ (Operations on Matrices) :

(1) दो आव्यूहों में समानता (Equality of Matrices)—दो आव्यूह बराबर कहलाते हैं यदि दोनों एक ही क्रम के हैं तथा एक आव्यूह के सभी तत्व दूसरे आव्यूह के संगत तत्वों के बराबर हैं। अत:

यदि $A = [a_{ij}]$ और $B = [b_{ij}]$ दोनों $m \times n$ क्रम के आव्यूह हैं और $(a_{ij} = b_{ij})$ तब $A = B$.

(2) आव्यूह की रचना (Construction of a Matrix)—2 × 3 क्रम (order) के आव्यूह की रचना, जिस के अवयव $a_{ij} = 2i + j$ है—

2 × 3 क्रम का आव्यूह, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \dots \end{bmatrix}$

$a_{11} = 2 \times 1 + 1 = 3, \ a_{12} = 2 \times 1 + 2 = 4, \ a_{13} = 2 \times 1 + 3 = 5$

$a_{21} = 2 \times 2 + 1 = 5, \ a_{22} = 2 \times 2 + 2 = 6, \ a_{23} = 2 \times 2 + 3 = 7$

$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

(3) आव्यूहों का योग (Addition of Matrices)—एक ही क्रम के दो आव्यूहों का योग उनके संगत तत्वों को जोड़ने से प्राप्त होता है। जैसे यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{तथा} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

तब, $$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+4 & 5-2 \\ 5+0 & 0+3 & -4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

(4) आव्यूहों का अन्तर (Subtraction of Matrices)—एक ही क्रम के दो आव्यूहों का अन्तर उनके संगत तत्वों को घटाने से प्राप्त होता है। जैसे—

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{तथा} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

तब, $$A - B = \begin{bmatrix} 8-3 & 2-5 & -4-(-1) \\ 6-2 & 7-1 & 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

(5) आव्यूहों का रेखीय संचय (linear Combination of Matrices)—यदि A तथा B एक ही कोटि $m \times n$ के दो आव्यूह हैं तथा p और q कोई दो वास्तविक संख्यायें हैं तब $pA + qB$ आव्यूह को दिए हुए आव्यूहों A तथा B का रेखीय संचय आव्यूह कहते हैं। स्पष्ट है कि रेखीय संचय आव्यूह की कोटि भी $m \times n$ ही होगी।

यदि कोई आव्यूह C इस प्रकार से है कि　$C = pA + qB$

तब आव्यूह C, आव्यूहों A तथा B का रेखीय संचय आव्यूह है। (देखो उदा० 7)

(6) वर्ग आव्यूह का सारणिक (Determinant of a Square Matrix)—यदि A कोई वर्ग आव्यूह है तो उसके तत्वों से प्राप्त सारणिक को वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते हैं तथा $|A|$ से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण—यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ तो इसके सारणिक का मान ज्ञात करो।

हल : $$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 6(1 \times 8 - 2 \times 5) - 4(2 \times 8 - 5 \times 7) + 3(2 \times 2 - 1 \times 7)$$

$$= 6(8 - 10) - 4(16 - 35) + 3(4 - 7)$$

$$= 6 \times (-2) - 4 \times (-19) + 3 \times (-3) = 55$$

उत्तर

(7) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of Two Matrices)—दो आव्यूहों का गुणनफल तभी सम्भव है जब आव्यूह A में स्तम्भों की संख्या आव्यूह B में पंक्तियों की संख्या के बराबर है। इस प्रकार यदि

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ है तो इनका गुणनफल AB, $m \times p$ क्रम का आव्यूह होगा जिसका (i, j)वाँ तत्व आव्यूह A की iवीं पंक्ति तथा आव्यूह B के jवें स्तम्भ को गुणा करके जोड़ने पर प्राप्त होता है। यदि

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \quad \text{तथा} \quad B = \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \text{ तब}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

तब $$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \\ R_3C_1 & R_2C_2 & R_3C_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

आव्यूहों के गुणनफल के गुण (Properties of the Multiplication of Matrics) :

1. $A \times B$ में, A में स्तम्भों की संख्या = B में पंक्तियों की संख्या
2. प्राय: $AB \neq BA$ अर्थात् क्रम विनिमय नियम का पालन नहीं होता।
3. $A(B + C) = AB + AC$ अर्थात आव्यूहों में योग के सापेक्ष बंटन के नियम का पालन होता है।
4. $A(BC) = (AB)C$ अर्थात् साहचर्य नियम का पालन होता है।
5. यदि $AB = O$ अर्थात् AB एक शून्य आव्यूह है तो A अथवा B अथवा दोनों क शून्य होना आवश्यक नहीं हैं।
6. $A \times A = A^2, A \times A \times A = A^3, A \times A \times \ldots n$ बार $= A^n$
7. $I^2 = I^3 = \ldots = I^n = I$ 8. $A \times I = I \times A = A$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. आव्यूह तथा सारणिक में भेद बताइये। (उ० प्र० डिप्लोमा 1989, 94)

हल : आव्यूह तथा सारणिक की परिभाषा तथा उनमें अन्तर बताना है।

आव्यूह (Matrix) :

1. आव्यूह $m \times n$ अवयवों की एक लम्ब सारणी होती है जिसमें m पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं।
2. आव्यूह में पंक्तियों तथा स्तम्भों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।
3. $m \times n$ अवयवों वाला आव्यूह $m \times n$ क्रम (order) का आव्यूह कहलाता है।
4. आव्यूह के अवयवों को [ ] या ( ) के बीच पंक्तियों एवं स्तम्भों के रूप में परिबद्ध किया जाता है।

सारणिक (Determinant) :

1. सारणिक $n \times n$ अवयवों की एक लम्ब सारणी होती है जिसमें n पंक्तियाँ तथा n ही स्तम्भ होते हैं।
2. सारणिक में पंक्तियाँ तथा स्तम्भ हमेशा बराबर होते हैं।
3. $n \times n$ अवयवों का सारणिक n क्रम (order) का सारणिक कहलाता है। इसमें अवयवों की संख्या n^2 होती है।
4. सारणिक के अवयवों को दो ऊर्ध्वाधर रेखाओं || के बीच परिबद्ध किया जाता है।

उदाहरण 2. यदि किसी आव्यूह में 12 अवयव हैं तो वह कितने सम्भव क्रमों (orders) का आव्यूह हो सकता है?

हल : चूँकि यदि कोई आव्यूह $m \times n$ कोटि का है तो उसमें $m \times n$ अवयव होते हैं, अत: 12 अवयवों वाले आव्यूह के लिए हमें 12 के सम्भव क्रमिक युग्म (ordered pairs) ज्ञात करने होंगे।

12 के क्रमिक युग्म (order pairs) हैं— $(1 \times 12), (2 \times 6), (3 \times 4), (4 \times 3), (6 \times 2), (12 \times 1)$

अत: 12 अवयवों का आव्यूह, $1 \times 12, 2 \times 6, 3 \times 4, 4 \times 3, 6 \times 2, 12 \times 1$ क्रम का हो सकता है। उत्तर

उदाहरण 3. उस 3×3 क्रम के आव्यूह की रचना करो जिसके अवयव $a_{ij} = 3i + 2j$ से प्राप्त किये गये हैं।

हल : 3×3 क्रम का आव्यूह, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$

$a_{11} = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5,$ $a_{12} = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$

$a_{13} = 3 \times 1 + 2 \times 3 = 9,$ $a_{21} = 3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$

$a_{22} = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10,$ $a_{23} = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$

$a_{31} = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11,$ $a_{32} = 3 \times 3 + 2 \times 2 = 13$

$a_{33} = 3 \times 3 + 2 \times 3 = 15$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \\ 11 & 13 & 15 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 4. यदि $\begin{bmatrix} x + y + z \\ x + y \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ तो x, y, z का मान ज्ञात करो।

हल : चूँकि समान आव्यूहों के संगत अवयव समान होते हैं

$\therefore$ $x + y + z = 9$ ...(1)

$x + y = 5$ ...(2)

$y + z = 7$ ...(3)

(1), (2) तथा (3) को हल करने पर, $x = 2, y = 3, z = 4.$ उत्तर

उदाहरण 5 (i). यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ तब $(A + B)$ तथा $(A - B)$ के मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)

हल : $A + B = \begin{bmatrix} 1 + 1 & 2 + 0 \\ 2 + 2 & -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 1 - 1 & 2 - 0 \\ 2 - 2 & -1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

उदाहरण 5 (ii). यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ तो $A + B$ तथा $A - B$ ज्ञात करो।

हल :

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 + 4 & 5 + 2 & 7 + 1 \\ 2 + 1 & 0 + 5 & -6 + 8 \\ 1 + 6 & 2 + 3 & 3 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$ उत्तर

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 - 4 & 5 - 2 & 7 - 1 \\ 2 - 1 & 0 - 5 & -6 - 8 \\ 1 - 6 & 2 - 3 & 3 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & -14 \\ -5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ तो $3A - 2B$ का मान ज्ञात करो।

हल : A के प्रत्येक तत्व को 3 से तथा B के प्रत्येक तत्व को 2 से गुणा करने पर,

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 4 \\ 3 \times 0 & 3 \times 4 & 3 \times 6 \\ 3 \times 5 & 3 \times 8 & 3 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 18 \\ 15 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ 2 \times 5 & 2 \times 3 & 2 \times 2 \\ 2 \times 0 & 2 \times 4 & 2 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 6 - 6 & 9 - 0 & 12 - 10 \\ 0 - 10 & 12 - 6 & 18 - 4 \\ 15 - 0 & 24 - 8 & 27 - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 2 \\ -10 & 6 & 14 \\ 15 & 16 & 13 \end{bmatrix}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 7. आव्यूह $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ को आव्यूहों $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ के रेखीय संयोग (Linear combination) के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : माना कि $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ...(1)

जहाँ c_1, c_2, c_3 तीन अदिश राशियां हैं। तब,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_2 & c_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - c_2 + 0 & c_1 + c_2 + 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 & 0 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

दोनों ओर के संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$-c_2 = -3, \quad c_1 + c_2 = 4, \quad c_1 + c_2 + c_3 = 2;$$

हल करने पर, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$

c_1, c_2, c_3 के ये मान (1) में रखने पर,

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 1 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ तो AB अथवा BA, जिसका भी अस्तित्व (existence) हो, उसे ज्ञात कीजिए।

हल : चूंकि A में स्तम्भों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के बराबर है। अतः AB का अस्तित्व है लेकिन B के स्तम्भों की संख्या, A में पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं है अतः BA सम्भव नहीं है। अब,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0 & 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 5 & 1 \times 5 + 2 \times (-4) + 3 \times 7 \\ 3 \times 2 + (-1) \times 1 + 4 \times 0 & 3 \times 3 + (-1) \times 2 + 4 \times 5 & 3 \times 5 + (-1) \times (-4) + 4 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 22 & 18 \\ 5 & 27 & 47 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 9. निम्न आव्यूहों का गुणनफल ज्ञात करो–

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

हल : $A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 6 & 1 \times 6 + 2 \times 2 + 3 \times 4 \\ 2 \times 2 + 0 \times 5 + 4 \times 1 & 2 \times 4 + 0 \times 3 + 4 \times 6 & 2 \times 6 + 0 \times 2 + 4 \times 4 \\ 3 \times 2 + 5 \times 5 + 1 \times 1 & 3 \times 4 + 5 \times 3 + 1 \times 6 & 3 \times 6 + 5 \times 2 + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 22 \\ 8 & 32 & 28 \\ 32 & 33 & 32 \end{bmatrix}$

$$A \times B \times C = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 22 \\ 8 & 32 & 28 \\ 32 & 33 & 32 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \times 2 + 28 \times 3 + 22 \times 5 & 15 \times 1 + 28 \times 0 + 22 \times 4 \\ 8 \times 2 + 32 \times 3 + 28 \times 5 & 8 \times 1 + 32 \times 0 + 28 \times 4 \\ 32 \times 2 + 33 \times 3 + 32 \times 5 & 32 \times 1 + 33 \times 0 + 32 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 224 & 103 \\ 252 & 120 \\ 323 & 160 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 10. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

हल : $A \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+0 & 0+4+0 & 0+0+5 \\ 1+0+0 & 0+3+0 & 0+0+6 \\ 4+0+0 & 0+5+0 & 0+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = A$

सिद्धम्

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $I_3 \cdot A = A$

अतः $A \cdot I_3 = I_3 A = A$

व्यापक रूप से, $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

उदाहरण 11. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ तो ज्ञात कीजिए–

(i) $A^2 + B^2$ (ii) AB तथा BA

हल : (i) $A^2 = A \times A$ का अस्तित्व (Existence) नहीं है चूँकि पहले A में 3 स्तम्भ हैं तथा दूसरे A में 2 पंक्तियां हैं जो कि बराबर नहीं हैं। इसी प्रकार $B^2 = B \times B$ का भी अस्तित्व नहीं है। वस्तुतः $(A^2 + B^2)$ का भी अस्तित्व नहीं है। उत्तर

(ii) $AB = A \times B$ में भी चूँकि A के स्तम्भों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं है अतः AB का अस्तित्व नहीं है। इसी प्रकार BA का भी अस्तित्व नहीं है। उत्तर

उदाहरण 12. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $A^2 - 4A - 5I = O$, जहाँ O शून्य आव्यूह है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)

हल : $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2 & 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 2 & 2 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 2 & 2 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 2 & 2 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 2 & 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

उदाहरण 13. यदि ω इकाई का घन मूल है तो सिद्ध करो कि $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

हल : L.H.S. $= \begin{bmatrix} 1+\omega & \omega+\omega^2 & \omega^2+1 \\ \omega+\omega^2 & \omega^2+1 & 1+\omega \\ \omega^2+\omega & 1+\omega^2 & \omega+1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 & -1 & -\omega \\ -1 & -\omega & -\omega^2 \\ -1 & -\omega & -\omega^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -\omega^2 - \omega - \omega^3 \\ -1 - \omega^2 - \omega^4 \\ -1 - \omega^2 - \omega^4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \omega^2 + \omega + 1 \\ 1 + \omega^2 + \omega \\ 1 + \omega^2 + \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ सिद्धम्

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 14. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha/2 \\ \tan\alpha/2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि

$$I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

हल : माना कि $\tan\dfrac{\alpha}{2} = t$ तब $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $\sin\alpha = \dfrac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\text{R.H.S.} = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\tan(\alpha/2) \\ \tan(\alpha/2) & 0 \end{bmatrix}\right\} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix}\right\} \times \begin{bmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{-2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1-t^2+2t^2 & -2t+t-t^3 \\ -t+t^3+2t & 2t^2+1-t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1+t^2 & -t(1+t^2) \\ t(t^2+1) & t^2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \times (1+t^2)\begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha/2 \\ \tan\alpha/2 & 1 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$$\text{L.H.S.} = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha/2 \\ \tan\alpha/2 & 0 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha/2 \\ \tan\alpha/2 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ From (1) and (2), R.H.S. = L.H.S. सिद्धम्

5. कुछ अन्य आव्यूह (Some other Matrices) :

1. परिवर्त आव्यूह (Transpose Matrix)—

यदि किसी दिये हुए आव्यूह A की पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाये तो प्राप्त आव्यूह को परिवर्त आव्यूह कहते हैं। उसे A' या A^t या A^T से प्रदर्शित करते हैं। यदि A की कोटि $m \times n$ है तो A' की कोटि $n \times m$ होगी।

परिवर्त आव्यूह के सम्बन्ध में कुछ प्रमेय—

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. किसी आव्यूह के परिवर्त आव्यूह का परिवर्त आव्यूह वही आव्यूह होता है, अर्थात् $(A')' = A$
2. आव्यूहों के योग का परिवर्त आव्यूह उनके अलग-अलग परिवर्त आव्यूहों के योग के बराबर होता है अर्थात्
   $(A+B)' = A' + B'$, $(A+B+C+ .....)' = A' + B' + C' + ...$
3. आव्यूहों के गुणनफलों का परिवर्त आव्यूह उनके परिवर्त आव्यूहों को विपरीत क्रम में किये गये गुणनफल के बराबर होता है
   अर्थात् $(A \cdot B)^t = B^t \times A^t$, $(A \cdot B \cdot C ..... N)^t = (N^t \cdot ..... \cdot C^t \cdot B^t \cdot A^t)$

उदाहरण 15. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ तो परिवर्त आव्यूह A' ज्ञात कीजिए।

हल : $\because A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ $\therefore A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ उत्तर

2. गुणांक आव्यूह तथा आगमेन्टिड आव्यूह (Coefficient Matrix and Augmented Matrix) :

माना कि

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

रैखिक समीकरणों का निकाय (System of linear equations) है। x, y, z के गुणांकों को क्रमबद्ध करने पर, $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ को समीकरणों के निकाय का गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) कहते हैं।

अचर पदों d_1, d_2, d_3 को भी सम्मिलित करने पर आव्यूह, $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$ को आगमेन्टिड आव्यूह कहते हैं।

3. सममित आव्यूह (Symmetric Matrix) :

यदि कोई वर्ग आव्यूह A ऐसा है कि $A = A'$ तब A को सममित आव्यूह कहते है।

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & g & f \\ g & f & c \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ सममित आव्यूह हैं।

स्पष्ट है कि i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = a_{ji}$ अर्थात् (i, j) वाँ तत्व = (j, i) वाँ तत्व

4. विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix) :

यदि कोई वर्ग आव्यूह A ऐसा है कि $A = -A'$ तब A को विषम सममित आव्यूह (skew symmetric matrix) कहते हैं।

$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; [illegible] विषम सममित आव्यूह हैं।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

स्पष्ट है कि i तथा j के सभी मानों के लिए, $a_{ij} = -a_{ji}$ अर्थात् (i, j) वाँ तत्व $= -(j, i)$ वाँ तत्व । इस नियम के आधार पर प्रमुख विकर्ण के सभी तत्व शून्य होते हैं :

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के गुण (Properties) :

(1) यदि A कोई आव्यूह है तब,

(i) $A + A'$ सममित आव्यूह है, $A - A'$ विषम सममित आव्यूह है।

(ii) $A \times A'$ या $A' \times A$ सममित आव्यूह है।

(2) यदि A सममित आव्यूह है तब $A^2, A^3, A^4, ..., A^n$ भी सममित आव्यूह है।

(3) यदि A विषम सममित आव्यूह है तब,

(i) $A^3, A^5, A^7, ..., A^n$ जहाँ n विषम है, विषम सममित आव्यूह हैं

(ii) $A^2, A^4, A^6, ..., A^n$, जहाँ n सम है, सममित आव्यूह हैं

(4) यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं तब $A + B$ तथा $AB + BA$ सममित आव्यूह हैं।

(5) किसी भी वर्ग आव्यूह को सममित तथा विषम सममित आव्यूहों में व्यक्त किया जा सकता है।

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

5. अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular Matrix) :

यदि किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान शून्य है अर्थात् $|A| = 0$ तो उस वर्ग आव्यूह को अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहते हैं। जैसे : $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं चूँकि इनके सारणिकों के मान शून्य हैं

जैसे : $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 3(36 - 36) - 4(48 - 12) + 8(24 - 6)$

$$= 3 \times 0 - 4 \times 36 + 8 \times 18 = -144 + 144 = 0$$

6. व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-Singular Matrix) :

यदि $|A| \neq 0$ तब $[A]$ को व्युत्क्रमणीय आव्यूह (non singular matrix) कहते हैं।

जैसे—$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है चूँकि इसके सारणिक का मान, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$

7. सहखण्ड आव्यूह (Cofactor Matrix) :

यदि किसी आव्यूह के अवयवों को उनके संगत सहखण्डों (cofactors) से प्रतिस्थापित (replace) कर दिया जाय तो प्राप्त आव्यूह को सहखण्ड आव्यूह कहते हैं। इसे A^c से अथवा $[A_{ij}]$ से निरूपित करते हैं।

उदाहरण 16. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ का सहखण्ड आव्यूह ज्ञात कीजिये।

हल : 4 का सहखण्ड, $A_{11} = 1$; 2 का सहखण्ड, $A_{12} = -3$; 3 का सहखण्ड, $A_{21} = -2$, 1 का सहखण्ड, $A_{22} = 4$

A के अवयवों को उनके सहखण्डों से प्रतिस्थापित करने पर,

$A^c = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, A का सहखण्ड आव्यूह (cofactor matrix) है।

नोट—यदि आव्यूह A को $[a_{ij}]$ से प्रदर्शित किया जाये तो उसके सहखण्ड आव्यूह को $[A_{ij}]$ से प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण 17. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ का सहखण्ड आव्यूह (cofactor matrix) ज्ञात कीजिए।

हल : $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड (cofactors) को $A_{11}, A_{12}, A_{13}, ...$ से निरूपित करने पर,

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -24$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 23$; $A_{13} = +\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -28$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12$; $A_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -11$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 14$;

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -13$; $A_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16$

A का सहखण्ड आव्यूह, $A^c = \begin{bmatrix} -24 & 23 & -28 \\ 12 & -11 & 14 \\ 14 & -13 & 16 \end{bmatrix}$

8. सह-खण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix) :

आव्यूह A के सहखण्ड आव्यूह (cofactor matrix) A^c के परिवर्त आव्यूह को सहखण्डज आव्यूह (adjoint matrix) कहते हैं। इसे Adj. A से निरूपित करते हैं। अतः

A का सहखण्डज आव्यूह Adj. $[A]$ = सहखण्ड आव्यूह का परिवर्त आव्यूह $= (A^c)'$ या $[A_{ij}]'$

उदाहरण 17 में A का सहखण्डज आव्यूह, $(A^c)' = \begin{bmatrix} -24 & 12 & 14 \\ 23 & -11 & -13 \\ -28 & 14 & 16 \end{bmatrix}$

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

सह-खण्डज आव्यूहों के गुण (Properties) :

(i) $A \cdot \text{Adj.}(A) = (\text{Adj.} A) \cdot A = |A| I$

(ii) $|\text{Adj.} A| = |A|^{n-1}, A \neq 0$

(iii) $\text{Adj.}(\text{Adj.} A) = |A|^{n-2} \cdot A$

(iv) $\text{Adj.} AB = \text{Adj.} B \cdot \text{Adj.} A$

9. व्युत्क्रम या प्रतिलोम आव्यूह (Inverse Matrix)—

किसी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह (non-singular matrix) का व्युत्क्रम आव्यूह (inverse matrix) एक ऐसा आव्यूह है जिससे मूल आव्यूह को गुणा करने पर इकाई आव्यूह प्राप्त होता है। इसे A^{-1} से प्रदर्शित करते हैं। इसे प्रतिलोम आव्यूह भी कहते हैं।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

व्युत्क्रम अथवा प्रतिलोमी (Inverse) आव्यूह के गुण :

(i) $A^{-1} = \frac{\text{Adj}.A}{|A|} = \frac{(A^c)'}{|A|}, |A| \neq 0$

(ii) यदि $|A| = 0$, तब A^{-1} का अस्तित्व नहीं है (A^{-1} does not exist)

(iii) यदि $|A| \neq 0$, तब A को invertible आव्यूह भी कहते हैं।

(iv) $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ (v) $(A^{-1})^{-1} = A$

(vi) $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$; $(ABC)^{-1} = C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$

(vii) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ (viii) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

(ix) यदि A समभित आव्यूह है तब A^{-1} भी समभित आव्यूह है तथा $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

10. लाम्बिक आव्यूह (Orthogonal Matrix) :

यदि.: एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि $A \times A' = A' \times A = I$, तब आव्यूह A लाम्बिक आव्यूह कहलाता है।

11. सम्मिश्र आव्यूह (Complex Matrix) :

यदि किसी आव्यूह के अवयव सम्मिश्र संख्यायें हैं तो वह सम्मिश्र आव्यूह कहलाता है।

12. संयुग्मी आव्यूह (Conjugate Matrix) :

यदि किसी आव्यूह A के अवयव सम्मिश्र संख्यायें हैं तो ऐसा आव्यूह, जिसके अवयव उन सम्मिश्र संखयाओं की संयुग्मी सम्मिश्र संख्यायें (Conjugate complex numbers) हैं, संयुग्मी आव्यूह कहलाता है। इसे $\bar{A}$ से निरूपित करते हैं।

13. संयुग्मी परिवर्त आव्यूह (Conjugate Transpose Matrix) :

संयुग्मी आव्यूह के परिवर्त आव्यूह को संयुग्मी परिवर्त आव्यूह कहते हैं। इसे $(\bar{A})^T$ या A^θ या A^* से निरूपित करते हैं।

$A = \begin{bmatrix} 2+4i & 1-6i \\ 3+5i & 5+i \end{bmatrix}$ (सम्मिश्र आव्यूह); $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-4i & 1+6i \\ 3-5i & 5-i \end{bmatrix}$ (A का संयुग्मी आव्यूह)

$(\bar{A})^T$ या A^θ या $A^* = \begin{bmatrix} 2-4i & 3-5i \\ 1+6i & 5-i \end{bmatrix}$ (A के संयुग्मी का परिवर्त आव्यूह)

14. हरमिटियन आव्यूह (Hermition Matrix)—

यदि कोई सम्मिश्र आव्यूह A ऐसा है कि उसका संयुग्मी परिवर्त आव्यूह, A के बराबर है तब आव्यूह A को हरमिटियन (Hermition) आव्यूह कहते हैं। अत: यदि $A^\theta = A$ अर्थात् $(\bar{A})^T = A$, तब आव्यूह A, हरमिटियन आव्यूह है।

15. विषम हरमिटियन आव्यूह (Skew Hermition Matrix)—

यदि कोई सम्मिश्र आव्यूह A ऐसा है कि उसका संयुग्मी परिवर्त आव्यूह '$-A$' के बराबर है तो A को विषम हरमिटियन (Skew Hermition) आव्यूह कहते हैं। अत: यदि $A^\theta = -A$ अर्थात् $(\bar{A})^T = -A$, तब आव्यूह A, विषम हरमिटियन आव्यूह है।

उदाहरणत : यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 5+3i \\ 5-3i & 8 \end{bmatrix}$ तब $\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5-3i \\ 5+3i & 8 \end{bmatrix}$

$\because \quad A^\theta = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 3 & 5+3i \\ 5-3i & 8 \end{bmatrix} = A$

अत: A हरमिटियन (Hermition) आव्यूह है।

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 8+4i \\ -8+4i & 0 \end{bmatrix}$, तब $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 8-4i \\ -8-4i & 0 \end{bmatrix}$

तथा $A^\theta = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -8-4i \\ 8-4i & 0 \end{bmatrix} = -A$

$\therefore A$ विषम हरमिटियन आव्यूह है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 18. निम्नलिखित समीकरणों का गुणांक आव्यूह तथा आगमेन्टिड आव्यूह लिखिये—

$$x - 2y + 4z = 1; \quad 3y - 2z + 4x = 3; \quad z - 2x + y = 4$$

गुणांक आव्यूह के सारणिक का मान भी ज्ञात कीजिये।

हल : समीकरणों को x, y, z के क्रम में लिखने पर

$$x - 2y + 4z = 1$$
$$4x + 3y - 2z = 3$$
$$-2x + y + z = 4$$

$$\text{गुणांक आव्यूह} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{उत्तर}$$

$$\text{आगमेन्टिड आव्यूह} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{उत्तर}$$

$$\text{गुणांक आव्यूह का सारणिक} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(3+2) + 2(4-4) + 4(4+6) = 45 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 19. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ का सह-खण्डज (Adjoint) आव्यूह ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ आव्यूह A का सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

अब सारणिक A अर्थात् $|A|$ के तत्वों के संगत सहखण्ड (cofactors)

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$; $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$; $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$; $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\ ; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$|A|$ के तत्वों के संगत सहखण्डों से निर्मित सहखण्ड आव्यूह $A^c = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

A का सहखंड आव्यूह $(\text{Adj}\, A) = A^c$ का परिवर्त आव्यूह $= (A^c)' = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ उत्तर

नोट : A_{11} का अर्थ है पहली पंक्ति तथा पहले स्तम्भ के कटान पर स्थित अवयव का सहखण्ड, A_{23} का अर्थ है दूसरी पंक्ति तथा तीसरे स्तम्भ के कटान पर स्थित अवयव का सहखण्ड,.... आदि।

उदाहरण 20. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध करो कि $A\,(\text{Adj}\, A) = (\text{adj}\, A) . A = |A|\, I$

हल : $|A|$ के तत्वों के सहखण्ड

$$A_{11} = +(-7) = -7, \qquad A_{12} = -(4) = -4$$
$$A_{21} = -(5) = -5, \qquad A_{22} = 2$$

A के सहखण्डों से बना आव्यूह, $A^c = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

Adj. $A = A^c$ का परिवर्त आव्यूह $= (A^c)' = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

अब
$$A . (\text{Adj}\, A) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \times (-7) + 5 \times (-4) & 2 \times (-5) + 5 \times 2 \\ 4 \times (-7) + (-7)((-4) & 4 \times (-5) + (-7) \times 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -34 & 0 \\ 0 & -34 \end{bmatrix} = -34 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= |A| . I \quad \because \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -34 \qquad ...(1)$$

इस प्रकार हम दिखा सकते हैं कि $(\text{Adj}\, A) \cdot A = |A| \cdot I$ ...(2)

(1) तथा (2) से, $A \cdot (\text{Adj A}) = (\text{Adj}\, A) \cdot A = |A| \cdot I$ सिद्धम्

उदाहरण 21. A^{-1} का मान ज्ञात कीजिए यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

हल : $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}\, A}{|A|}$ जबकि $\text{adj}\, A = [A_{ij}]'$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \qquad A_{11} = 6, \quad A_{12} = -5$$
$$A_{21} = -7, \quad A_{22} = 3$$

$$\therefore \quad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Adj}\, A = [A_{ij}]' = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 35 = -17$$

$$A^{-1} = \frac{adj\, A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}{-17} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{-3}{17} \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 22. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} का मान ज्ञात कीजिये।

हल : $A^{-1} = \dfrac{adj\, A}{|A|}$ जबकि $adj\, A = [A_{ij}]'$ और $[A_{ij}] = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -42$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 18, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 29$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 28, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -23, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -19$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -42 & 18 & 29 \\ 28 & 12 & -23 \\ 26 & 8 & -19 \end{bmatrix}$$

$$Adj\, A = [A_{ij}]' = \begin{bmatrix} -42 & 28 & 26 \\ 18 & 12 & 8 \\ 29 & -23 & -19 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 2(0 - 42) - 3(0 + 18) + 4(35 - 6)$$
$$= -84 - 54 + 116 = 22$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\, A}{|A|} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -42 & 28 & 26 \\ 18 & 12 & 8 \\ 29 & -23 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-21}{11} & \frac{14}{11} & \frac{13}{11} \\ \frac{9}{11} & \frac{6}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{29}{22} & \frac{-23}{22} & \frac{-19}{22} \end{bmatrix}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 23. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह को सममित और विषम सममित (symmetrical and skew symmetrical) आव्यूहों के योग के रूप में प्रकट किया जा सकता है।

हल: किसी आव्यूह A को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है—

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A') \qquad ...(1)$$

$\because$ $(A + A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A'$ $\therefore$ $(A + A')$ सममित आव्यूह है।

$\because$ $(A - A')' = A' - (A')' = A' - A = -(A - A')$ $\therefore$ $(A - A')$ विषम सममित आव्यूह है।

$\Rightarrow$ (1) से, A = सममित आव्यूह + विषम सममित आव्यूह = सममित तथा विषम सममित आव्यूहों का योग (सिद्धम्)

उदाहरण 24. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ को सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के रूप में प्रकट करो।

हल: $\because$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\therefore A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \text{सममित आव्यूह}$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \text{विषम सममित आव्यूह}$$

$$A = \frac{1}{2}[A + A'] + \frac{1}{2}[A - A']$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \text{सममित तथा विषम सममित आव्यूहों का योग}$$ उत्तर

उदाहरण 25. आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ को सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में प्रकट करो।

हल: $\because$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 9 \\ 11 & 2 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 11 & 9 \\ 11 & 2 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$ उत्तर

= सममित आव्यूह + विषम सममित आव्यूह

उदाहरण 26. समीकरण $2x + 3y = 7$ तथा $5x - y = 9$ का हल आव्यूह विधि से करो।

हल: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

$A_{11} = -1$; $A_{12} = -5$; $A_{21} = -3$, $A_{22} = 2$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{Adj.} A = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 15 = -17$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A एक व्युत्क्रमणीय (non-singular) आव्यूह है।

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

समीकरणों का हल $X = A^{-1} \times B$, इसमें X, A^{-1} तथा B के मान रखने पर

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -34 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore x = 2,\ y = 1$$ उत्तर

उदाहरण 27. समीकरणों

$$2x + y + z = 1$$
$$x - 2y - 3z = 1$$
$$3x + 2y + 4z = 5$$

का हल आव्यूह विधि से कीजिए।

हल: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(-8+6) - 1(4+9) + 1(2+6)$
$= -4 - 13 + 8 = -9 \neq 0$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय (Non-singular) आव्यूह है।

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}}{|A|} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -13 & 5 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$ (विद्यार्थी adj A स्वयं ज्ञात करें।)

समीकरणों का हल $X = A^{-1} \times B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -13 & 5 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} (-2) \times 1 + (-2) \times 1 + (-1) \times 5 \\ (-13) \times 1 + 5 \times 1 + 7 \times 5 \\ 8 \times 1 + (-1) \times 1 + (-5) \times 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -9 \\ 27 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \therefore x = 1, y = -3, z = 2$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 1

1. (a) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ तो $3A$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

1. (b) दिखाइये कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

2 (a). यदि $\begin{bmatrix} x+3 & y+1 \\ 2z-4 & t+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तो x, y, z और t के मान ज्ञात करो।

2 (b). यदि $\begin{bmatrix} x+2y-z \\ x+y \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ तो x, y, z के मान ज्ञात करो।

3. यदि $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$, $2P - 3Q$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

4. यदि $x + 2y = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $2x - y = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ तब x तथा y के मान ज्ञात करो।

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 12 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तब $4A - 3B$ तथा $2A + 5B$ के मान ज्ञात करो।

6. यदि $x + y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ तब x तथा y के मान ज्ञात करो।

7. आव्यूह $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ को आव्यूहों $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ के रेखीय संयोग के रूप में व्यक्त करो।

8. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ को $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ के रेखीय संयोग के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

9. A^2 का मान ज्ञात कीजिये यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1994)

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ तो AB अथवा BA, जिसका भी अस्तित्व हो, उसे ज्ञात कीजिए।

11. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ तो दिखाओ कि AB एक विकर्ण आव्यूह है।

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ दिखाइये कि $AB \neq BA$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि AB शून्य आव्यूह (Zero matrix) है।

14. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा आव्यूह $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $AB = BA$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)

15. सिद्ध कीजिए कि आव्यूहों

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \text{ तथा } \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$$

का गुणनफल शून्य होगा यदि θ और ϕ का अन्तर $\frac{\pi}{2}$ का विषम अपवर्त्य है। (उ० प्र० डिप्लोमा 1998)

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ तो $(A \times B \times C)$ का मान ज्ञात करो।

17. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा I_3 इकाई आव्यूह है तो $A^2 - 3A + 9I$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ तो $A^3 - 2A^2 + A - I$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

19. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ जबकि I, 2×2 क्रम का इकाई आव्यूह है।

20. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ तो $AB - AC$ का मान ज्ञात करो।

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज आव्यूह (adjoint matrix) ज्ञात करो।

22. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ तो A का सहखण्डज आव्यूह ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

23. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$ तो A का सहखण्डज आव्यूह ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

24. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $AI_3 = I_3A$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

25. यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $A.(adj\,A) = (adj\,A).A = |A|.I$

26. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ तो A का प्रतिलोम (Inverse) ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)

27. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1995)

28. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1999)

29. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)

30. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} का मान ज्ञात कीजिये। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)

31. यदि $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तो दिखाओ कि $E^2F + F^2E \neq E$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1999)

32. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix}$ तथा I_3, क्रम 3 का इकाई आव्यूह है तो सिद्ध करो कि $A^3 = pI_3 + qA + rA^2$. (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)

33. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ तो a तथा c के मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

34. आव्यूह विधि से निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x + 3y + 4z = 1$$

(उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

35. निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि से हल करो—

(i) $3x + 7y = 24$
$2x + 5y = 17$

(ii) $x + 3y + 3z = 1$
$x + 4y + 3z = 0$
$x + 3y + 4z = 2$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

(iii) $3x + 2y + 4z = 7$
$2x + y + z = 4$
$x + 3y + 5z = 2$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

(iv) $2x + 3y - z = 0$
$x - y - 2z = 0$
$3x + y + 3z = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

36. यदि $3x - 4y + z = 4$, $2y - x + 2z = 1$ तथा $3z + 2x - 5y = 3$ तो गुणांक आव्यूह तथा आगमेन्टिड आव्यूह लिखो तथा गुणांक आव्यूह के सारणिक का मान भी ज्ञात करो।

37. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $f(x) = x^2 - 5x + 6$ तो $f(A)$ की गणना कीजिए।

38. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

39. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)

40 (i) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A\,(Adj\,A) = (Adj\,A)\,A = |A|\,I$

41 (i). यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $A^{-1} = A$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

42. सिद्ध करो कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ लाम्बिक आव्यूह है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

43. दिखाइये कि आव्यूह $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ लम्बकोणीय आव्यूह है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

44. निम्नलिखित को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए (Define the following with example) :
   (i) इकाई आव्यूह (Unit matrix) (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)
   (ii) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular matrix) (उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 05, 06)
   (iii) विकर्ण आव्यूह (square matrix) (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)
   (iv) सममित आव्यूह (Symmetric matrix)
   (v) विषम सममित आव्यूह (Skew symmetric matrix) (उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 06)

45. निम्नलिखित को उदाहरण सहित परिभाषित करो (Define the following with example) :
   (i) लाम्बिक आव्यूह (orthogonal matrix) (उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 05)
   (ii) परिवर्त आव्यूह (Transpose matrix)
   (iii) सहखण्ड आव्यूह (Cofactor matrix)
   (iv) सहखण्डज आव्यूह (Adjoint matrix)

46. निम्नलिखित को उदाहरण सहित परिभाषित करो (Define the following with example) :
   (i) अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular matrix)
   (ii) व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-singular matrix)
   (iii) संयुग्मी आव्यूह (Conjugate matrix)
   (iv) सम्मिश्र आव्यूह (Complex matrix)
   (v) एकिक आव्यूह (Identity matrix) (उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 07)

संकेत : यदि $A \times (\bar{A})' = (\bar{A})' \times A = I$ तब आव्यूह A को एकिक आव्यूह कहते हैं जहां $\bar{A}$ संयुग्मी आव्यूह है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उत्तरमाला 1

1 (a). $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

2 (a). $x = 5; y = 0; z = 7/2; t = -5$

2 (b). $x = 3, y = 1, z = 2$

3. $\begin{bmatrix} -4 & 4 & -3 \\ -9 & 10 & -1 \\ -15 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

4. $x = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. $4A - 3B = \begin{bmatrix} 14 & 28 & 9 \\ -16 & -32 & 15 \\ -17 & 1 & 14 \end{bmatrix}; 2A + 5B = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 11 \\ 44 & 62 & 27 \\ 37 & 33 & 46 \end{bmatrix}$

6. $x = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix}$

10. $AB = \begin{bmatrix} 9 & 39 \\ 2 & 10 \\ 7 & 26 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 108 & 113 \\ 95 & 94 \\ 139 & 133 \end{bmatrix}$

17. (i) $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 19 & 14 \\ 2 & 7 & 21 \\ 11 & -15 & 6 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

21. (i) $\begin{bmatrix} 1 & -14 & -24 \\ -14 & -10 & 27 \\ -8 & 9 & -14 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} -3/4 & 1/4 & 7/4 \\ -1/4 & -1/4 & 5/4 \\ 5/4 & 1/4 & -13/4 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

33. 1; − 1

34. $\frac{-3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{-2}{7}$

35. (i) $x = 1, y = 3$; (ii) $x = 1, y = -1, z = 1$;

(iii) $x = \frac{9}{4}, y = \frac{-9}{8}, z = \frac{5}{8}$ (iv) $x = y = z = 0$

36. गुणांक आव्यूह $= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, आगमेन्टिड आव्यूह $= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; 21

37. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -7 & 5 & 14 \\ -5 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

40. (i) $= \begin{bmatrix} -\frac{1}{41} & -\frac{5}{41} & \frac{3}{41} \\ -\frac{26}{41} & \frac{8}{41} & \frac{17}{41} \\ -\frac{42}{41} & -\frac{27}{41} & \frac{4}{41} \end{bmatrix}$

2 प्रारम्भिक पंक्ति/स्तम्भ रूपान्तरण

(Elementry Row/Column Transformation)

2.1. पंक्ति एवं स्तम्भ आव्यूह (Row and Column Matrices) :

यदि किसी आव्यूह में केवल एक पंक्ति है तो उसे पंक्ति आव्यूह (row matrix) कहते हैं।

$R = [3, 2, 7, 8]$ एक पंक्ति आव्यूह है।

यदि किसी आव्यूह में केवल एक स्तम्भ है तो उसे स्तम्भ आव्यूह (column matrix) कहते हैं।

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ एक स्तम्भ आव्यूह है।

2.2. किसी आव्यूह के पंक्ति तथा स्तम्भ सदिश :

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $m \times n$ कोटि का आव्यूह है।

आव्यूह, $R_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$

आव्यूह, $R_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}]$

आव्यूह, $R_m = [a_{m_1} \quad a_{m_2} \quad \cdots \quad a_{mn}]$

आव्यूह A के पंक्ति सदिश (row vectors) हैं तथा

तथा $C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m_1} \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m_2} \end{bmatrix}$, ……, $C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

आव्यूह A के स्तम्भ सदिश (Column Vectors) हैं।

2.3. सदिशों की रैखिक स्वतन्त्रता तथा परतन्त्रता

(Linear Independence and Linear Dependence of the Vectors) :

1. पंक्ति सदिशों की रैखिक स्वतन्त्रता—$1 \times n$ कोटि के पंक्ति सदिशों $R_1, R_2, \ldots, R_m$ का समुच्चय, पंक्ति सदिशों का रैखिक स्वतन्त्र समुच्चय (Linearly Independent set) कहलाता है यदि

$$k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3 + \ldots + k_mR_m = O$$

जहाँ अदिश $k_1, k_2, k_3, \ldots k_m$ सभी शून्य हैं तथा $O = [0, 0, \ldots, 0]$, $1 \times n$ कोटि का शून्य पंक्ति सदिश (null row vector) है।

2. पंक्ति सदिशों की रैखिक परतन्त्रता—$1 \times n$ कोटि के पंक्ति सदिशों $R_1, R_2, \ldots, R_m$ का समुच्चय, पंक्ति सदिशों का रैखिक परतन्त्र समुच्चय (Linearly dependent set) कहलाता है यदि

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3 + \ldots + k_mR_m = O$$

जहाँ $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ सभी शून्य नहीं हैं तथा O, $1 \times n$ कोटि का शून्य पंक्ति सदिश (null row vector) है।

3. **स्तम्भ सदिशों की रैखिक स्वतन्त्रता :** $m \times 1$ कोटि के स्तम्भ आव्यूहों $C_1, C_2, \ldots, C_n$ का समुच्चय, स्तम्भ सदिशों का **रैखिक स्वतन्त्र समुच्चय (Linearly independent set)** कहलाता है यदि

$$k_1C_1 + k_2C_2 + k_3C_3, + \ldots + k_mC_m = O$$

जहाँ अदिश $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ सभी शून्य हैं तथा $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$, $m \times 1$ कोटि का शून्य स्तम्भ सदिश (null column vector) है।

4. **स्तम्भ सदिशों की रैखिक परतन्त्रता :** $m \times 1$ कोटि के स्तम्भ आव्यूहों $C_1, C_2, \ldots, C_n$ का समुच्चय, स्तम्भ सदिशों का **रैखिक परतन्त्र समुच्चय (Linearly dependent set)** कहलाता है यदि

$$k_1C_1 + k_2C_2 + k_3C_3, + \ldots + k_nC_n = O$$

जहाँ अदिश $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ सभी शून्य नहीं हैं तथा O, $m \times 1$ कोटि का शून्य स्तम्भ सदिश (null column vector) है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि सदिशों का समुच्चय $V_2 = \{(2,3), (2,6)\}$ रैखिकता स्वतन्त्र (linearly independent) समुच्चय है।

हल : $R_1 = (2, 3)$, $R_2 = (2, 6)$

माना कि k_1, k_2 दो ऐसे अदिश हैं कि

$$k_1R_1 + k_2R_2 = O$$

$\Rightarrow$ $k_1(2, 3) + k_2(2, 6) = (0, 0)$

$\Rightarrow$ $(2k_1 + 2k_2) + (3k_1 + 6k_2) = (0, 0)$

$\Rightarrow$ $2k_1 + 2k_2 = 0$ ...(1)

तथा $3k_1 + 6k_2 = 0$ ...(2)

हल करने पर, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$

अतः सदिशों R_1, R_2 का समुच्चय रैखिकतः स्वतन्त्र है। उत्तर

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि सदिशों $\overline{X}_1 = (2, 3), \overline{X}_2 = (4, -2)$ तथा $\overline{X}_3 = (-3, 6)$ का समुच्चय रैखिक परतन्त्र (linearly dependent) समुच्चय है।

हल : $V_3 = \{(2, 3), (4, -2), (-3, 6)\}$

$\overline{X}_1 = (2, 3)$, $\overline{X}_2 = (4, -2)$, $\overline{X}_3 = (-3, 6)$

माना कि k_1, k_2, k_3 तीन ऐसी अदिश राशियाँ हैं कि

$$k_1\overline{X}_1 + k_2\overline{X}_2 + k_3\overline{X}_3 = O$$

$\Rightarrow$ $k_1(2, 3) + k_2(4, -2) + k_3(-3, 6) = O$

$\Rightarrow$ $(2k_1 + 4k_2 - 3k_3) + (3k_1 - 2k_2 + 6k_3) = (0, 0)$

$\Rightarrow$ $2k_1 + 4k_2 - 3k_3 = 0$ ...(1)

तथा $3k_1 - 2k_2 + 6k_3 = 0$ ...(2)

$\Rightarrow$ $\dfrac{k_1}{18} = \dfrac{k_2}{-21} = \dfrac{k_3}{-16}$

$\Rightarrow$ समीकरणें (1) तथा (2) $k_1 = 18, k_2 = -21$, $k_3 = -16$ के लिए सत्य हैं अतः दिए हुए सदिशों का समुच्चय रैखिकतः परतन्त्र है। उत्तर

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि सदिश $\overline{X}_1 = (2, 3, 5)$ तथा $\overline{X}_2 = (4, 6, 10)$ का समुच्चय रैखिक आश्रित समुच्चय (linearly dependent set) है।

हल : $V_2 = \{(2, 3, 5), (4, 6, 10)\}$

$\overline{X}_1 = (2, 3, 5)$, $\overline{X}_2 = (4, 6, 10)$

माना कि k_1, k_2 दो ऐसे सदिश हैं कि $k_1\overline{X}_1 + k_2\overline{X}_2 = O$

$\Rightarrow$ $k_1(2, 3, 5) + k_2(4, 6, 10) = O$

$\Rightarrow$ $(2k_1 + 4k_2) + (3k_1 + 6k_2) + (5k_1 + 10k_2) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ $2k_1 + 4k_2 = 0$ ...(1)

$3k_1 + 6k_2 = 0$ ...(2)

$5k_1 + 10k_2 = 0$ ...(3)

समी० (1) से, $k_1 = -2k_2$ जो समी० (2) तथा (3) को भी सन्तुष्ट करता है। यदि $k_1 = 4$ तब $k_2 = -2$; यदि $k_1 = -2$ तब $k_2 = 1$ आदि। अतः दिये हुए पंक्ति सदिशों का समुच्चय रैखिकतः आश्रित है। उत्तर

उदाहरण 4. दिखाइये कि $V_3 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\ (1, 1, 1)\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र समुच्चय है।

हल : $\because$ $V_3 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

$\therefore$ $X_1 = (1, 0, 0)$, $X_2 = (0, 0, 1)$, $X_3 = (1, 1, 1)$

माना कि k_1, k_2, k_3 तीन ऐसे अदिश हैं कि

$$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = O$$

$\Rightarrow$ $k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 0, 1) + k_3(1, 1, 1) = O$

$\Rightarrow$ $(k_1 + k_3) + k_3 + (k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ $k_1 + k_3 = 0$ ...(1)

$k_3 = 0$ ...(2)

$k_2 + k_3 = 0$ ...(3)

जो तभी सम्भव है यदि, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ अतः दिया V_3 रैखिकतः स्वतन्त्र समुच्चय है। उत्तर

उदाहरण 5. यदि $\overline{X}_1 = [3, 1, -4]$ और $\overline{X}_2 = [2, 2, -3]$ तो दिखाइये कि सदिश $\overline{X}_1$ तथा $\overline{X}_2$ परिमेय संख्याओं के लिए रैखिक स्वतन्त्र (linearly independent) हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

हल : माना कि अदिश राशियाँ k_1 and k_2 ऐसी हैं कि

$$k_1\overline{X}_1 + k_2\overline{X}_2 = O$$

$\Rightarrow$ $k_1[3, 1, -4] + k_2[2, 2, -3] = [0, 0, 0]$

$\Rightarrow$ $3k_1 + 2k_2 = 0$, $k_1 + 2k_2 = 0$, $-4k_1 - 3k_2 = 0$

इन समीकरणों को हल करने पर, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ अतः सदिश $\overline{X}_1$ तथा $\overline{X}_2$ रैखिक स्वतन्त्र सदिश हैं। उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 2 (1)

1. दिखाइये किसी सदिश समष्टि V_2 का परिमित समुच्चय $\{(3, 5), (2, 3)\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र (linearly independent) है।
2. सिद्ध कीजिए कि सदिश (2, 3, 4), (0, 1, 2), (– 1, 1, – 1) एक घात स्वतन्त्र है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)
3. दिखाइये कि किसी सदिश समष्टि V_3 का परिमित समुच्चय $\{(3, 4, -1), (1, 2, 0), (1, 0, -1)\}$ रैखिकतः परतन्त्र (linearly dependent) है।
4. सिद्ध करो कि सदिश $X_1 = (3, 4, 2)$ तथा $X_2 = (-6, -8, -2)$ रैखिकतः परतन्त्र (linearly dependent) हैं।
5. सिद्ध करो सदिश $X_1 = (3, 1, 4)$ तथा $X_2 = (2, 2, -3)$ रैखिकतः स्वतन्त्र (linearly independent) हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)
6. परीक्षण कीजिए कि निम्न सदिशों का समुच्चय रैखिकतः स्वतन्त्र है या परतन्त्र।
$$X_1 = (1, 2, 3),\ X_2 = (3, -2, 1),\ X_3 = (1, -6, -5)$$
7. यदि $\bar{X}_1 = [3, 1, -4], \bar{X}_2 = [2, 2, -3]$ तथा $\bar{X}_3 = [0, -4, 1]$ तो दिखाइये कि सदिश परिमेय संख्याओं के क्षेत्र पर परस्पर स्वतन्त्र हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)
8. दिखाइये कि सदिश $X_1 = (3, 2, 4), X_2 = (-2, 4, 6)$ तथा $X_3 = (4, -3, 1)$ एक घात परतन्त्र समुच्चय बनाते हैं।
9. दिखाइये कि सदिश $X_1 = (2, 3, 4), X_2 = (4, 6, 8)$ तथा $X_3 = (6, 9, 12)$ एक घात स्वतन्त्र समुच्चय बनाते हैं।
10. सिद्ध कीजिए कि सदिश $\bar{X}_1 = (1, 2, 4)$ और $\bar{X}_2 = (3, 6, 12)$ एक घात आश्रय है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

2.4. किसी आव्यूह का प्रारम्भिक रूपान्तरण (Elementry Transformations of a Matrix) :

(1) आव्यूहों में निम्न संक्रियायें (operations) प्रारम्भिक संक्रियायें अथवा प्रारम्भिक रूपान्तरण कहलाते हैं।

(i) आव्यूह की किन्हीं दो पंक्तियों अथवा दो स्तम्भों को आपस में बदलना (Interchanging of any two rows or columns of a matrix)

ith तथा *jth* पंक्तियों के परस्पर अदलने-बदलने को R_{ij} या $R_i \leftarrow\rightarrow R_j$ और *ith* तथा *jth* स्तम्भों के परस्पर अदलने-बदलने को C_{ij} या $C_i \leftarrow\rightarrow C_j$ से निरूपित करते हैं।

(ii) आव्यूह की किसी पंक्ति अथवा किसी स्तम्भ के अवयवों को अशून्य अदिश राशि k से गुणा करना (To multiply the elements of any row or column by a non-zero constant number)

ith पंक्ति के अवयवों को k से गुणा करने को kR_i तथा *ith* स्तम्भ के अवयवों को k से गुणा करने को kC_i से निरूपित करते हैं, जहां $k \neq 0$

(iii) आव्यूह की किसी एक पंक्ति अथवा स्तम्भ के अवयवों को किसी अशून्य स्थिर राशि k से गुणा कर किसी दूसरी पंक्ति/स्तम्भ के संगत अवयवों में जोड़ना (To add the k times elements of a row/column to the corresponding elements of another row/column).

ith पंक्ति/स्तम्भ के अवयवों को k से गुणा कर *jth* पंक्ति/स्तम्भ के अवयवों में जोड़ने को $R_j \to kR_i + R_j$ एवं $C_j \to kC_i + C_j$ से निरुपित करते हैं।

(2) तुल्य आव्यूह (Equivalent Matrices)

यदि एक आव्यूह A से प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा कोई नया आव्यूह B प्राप्त किया गया हो तो ये दोनों आव्यूह, तुल्य आव्यूह कहलाते हैं। इन्हें $B \sim A$ के संकेत से निरूपित करते हैं।

(3) प्रारम्भिक आव्यूह (Elementary Matrices)

उदाहरण 6. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ तो $R_{32}, C_{21}, 4R_2, 6C_3, 2R_1 + 3R_2, 4C_2 + 3C_3$ के मान प्राप्त करें।

हल : (i) R_{32} के लिए : $R_3 \leftarrow\rightarrow R_2$ अर्थात् तीसरी तथा दूसरी पंक्ति को परस्पर बदलने पर,
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$ उत्तर

(ii) C_{21} के लिए : $C_2 \leftarrow\rightarrow C_1$ अर्थात् दूसरे तथा पहले स्तम्भों को परस्पर बदलने पर,
$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$ उत्तर

(iii) $4R_2$ के लिए : दूसरी पंक्ति के अवयवों को 4 से गुणा करने पर,
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 12 & 16 & 32 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$ उत्तर

(iv) $6C_3$ के लिए : तीसरे स्तम्भ के अवयवों को 6 से गुणा करने पर,
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 48 \\ 4 & 6 & 42 \end{bmatrix}$$

(v) $2R_1 + 3R_2$ के लिए : R_1 के 2 से गुणक अवयवों में R_2 के 3 से गुणक अवयवों को जोड़ने पर
$$A \sim \begin{bmatrix} 13 & 22 & 26 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$ उत्तर

(vi) $4C_2 + 3C_3$ के लिए : C_2 के 4 से गुणक अवयवों में C_3 के 3 से गुणक अवयवों को जोड़ने पर,
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 23 & 1 \\ 3 & 40 & 8 \\ 4 & 45 & 7 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 7. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा निम्न आव्यूह A को उच्च त्रिभुजीय आव्यूह (upper triangular matrix) में परिवर्तित करो।
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

हल : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 3R_1$ की संक्रियायें (operations) करने पर,
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

जोकि उच्च त्रिभुजीय आव्यूह है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 8. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा निम्न आव्यूह को निम्न त्रिभुजीय आव्यूह (lower triangular matrix) में परिवर्तित करो।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

हल: $C_2 \to C_2 - 3C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - 4C_1$ की संक्रियायें करने पर,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (C_3 \to C_3 - C_2 \text{ से})$$

जोकि निम्न त्रिभुजीय आव्यूह है।

उदाहरण 9. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ को इकाई आव्यूह में रूपान्तरित करो।

हल: $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (R_{23} \text{ अर्थात् } R_2 \leftrightarrow R_3 \text{ द्वारा})$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \to R_1 + 3R_3 \text{ तथा} \\ R_2 \to R_2 - 3R_3 \text{ से} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \to R_1 + 2R_2 \text{ तथा} \\ R_2 \to -R_2, R_3 \to -R_3 \text{ से} \end{pmatrix}$$

जोकि इकाई आव्यूह है।

2.5. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा किसी आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करना
(To Compute Inverse Matrix of a given matrix by elementary transformations) :

दिये हुए आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित संक्रियायें करो–

(i) $A = I \times A$ लिखो।

(ii) फिर बाईं ओर के आव्यूह A पर तथा दाईं ओर के आव्यूह I पर एक साथ ऐसी प्रारम्भिक रूपान्तरण संक्रियायें करो कि बाईं ओर का आव्यूह A, इकाई आव्यूह में परिवर्तित हो जाये।

(iii) इससे दाईं ओर का आव्यूह I, एक नये आव्यूह में बदल जायेगा।

(iv) यही आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह होगा ⇒ यदि $A = I \times A$ से $I = B \times A$ तब $B = A^{-1}$

उदाहरण 10. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करो।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

हल: $A = I \times A$ से, $$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A \quad \left(R_1 \to \frac{R_1}{3} \text{ से}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A \quad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A \quad (R_2 \to -R_2 \text{ से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A \quad (R_1 \to R_1 + R_2 \text{ से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix} \times A \quad (R_3 \to R_3 + R_2 \text{ से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix} \times A \quad (R_2 \to R_2 - 4R_3 \text{ से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \times A \quad (R_3 \to -3R_3 \text{ से})$$

$$\Rightarrow I = B \times A \Rightarrow \because A^{-1} = B$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 2 (2)

1. निम्न आव्यूह को उच्च-त्रिभुजीय आव्यूह (upper triangular matrix) में रूपान्तरित करो।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

2. निम्न आव्यूह को निम्न-त्रिभुजीय आव्यूह (lower triangular matrix) में रूपान्तरित करो।

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

निम्न आव्यूहों को इकाई आव्यूहों (unit matrices) में रूपान्तरित करो।

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

प्रारम्भिक पंक्ति रूपान्तरण (by row transformation) द्वारा निम्न आव्यूहों के व्युत्क्रम आव्यूहों (Inverse matrices) ज्ञात करो।

5. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)

उत्तरमाला 2 (2)

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$ 6. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

7. $-\frac{1}{22}\begin{bmatrix} -42 & 28 & 26 \\ -18 & 12 & 8 \\ 29 & -23 & -19 \end{bmatrix}$ 8. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

2.6. उप-आव्यूह (Sub-Matrix) :

दिये हुये आव्यूह A में से कुछ पंक्तियों या कुछ स्तम्भों या पंक्तियों तथा स्तम्भों दोनों को छोड़कर बनाये गये आव्यूहों को A के उप-आव्यूह कहते हैं। यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

जो कि 3×5 क्रम का आव्यूह है, तब

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \ldots$$ आदि आव्यूह, A के उप-आव्यूह हैं।

आव्यूह A का एक उप-आव्यूह स्वयं आव्यूह भी होता है क्योंकि इसे A में से किसी भी पंक्ति या स्तम्भ को न छोड़ कर प्राप्त किया जाता है।

2.7. आव्यूह का लघु-सारणिक (Minor of a Matrix) :

किसी $m \times n$ क्रम के आव्यूह A के सभी उपवर्ग आव्यूहों (square submatrix) के सारणिक अर्थात् जो $2 \times 2, 3 \times 3, \ldots$ क्रम के उपवर्ग आव्यूह हैं, सारणिक आव्यूह A के लघु सारणिक कहलाते हैं।

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 8 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तब सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 \\ 7 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \\ 9 & 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \ldots$ आदि

A के लघु-सारणिक (minors) हैं।

2.8. आव्यूह की कोटि (Rank of a Matrix) :

किसी आव्यूह A की कोटि (Rank) उस आव्यूह में उच्चतम क्रम के अशून्य लघुसारणिक का क्रम (order) होता है। (Rank of a matrix is the order of the highest order of the non-zero minor in that matrix)

आव्यूह की कोटि को $r(A)$ या $\rho(A)$ से निरूपित करते हैं।

नोट—1. शून्य आव्यूह (null matrix) की कोटि शून्य होती है क्योंकि शून्य आव्यूह के सभी लघु सारणिकों (minors) के मान शून्य होते हैं।

2. अशून्य आव्यूहों की कोटि एक अथवा एक से अधिक होती है (Rank of non-null matrices ≥ 1)
3. माना कि कोई आव्यूह $m \times n$ क्रम (order) का है जिसमें
   (i) यदि $m \leq n$, तब $r \leq m \Rightarrow$ यदि आव्यूह 3×5 क्रम का है तब $r \leq 3$ ।
   (ii) यदि $n \leq m$, तब $r \leq n \Rightarrow$ यदि आव्यूह 4×2 क्रम का है तब $r \leq 2$ ।
4. परिवर्त आव्यूह (transpose matrix) की कोटि वही होती है जो मूल आव्यूह की है अर्थात् $\rho(A) = \rho(A')$
5. प्रारम्भिक रूपान्तरण से किसी आव्यूह की कोटि नहीं बदलती है। (Elementary transformations do not alter the rank of the matrix)

2.9. किसी आव्यूह की कोटि ज्ञात करना (To Find the Rank of a Matrix) :

उदाहरण 11. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ की कोटि ज्ञात करो।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल : $\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 4\end{bmatrix}$ का सारणिक, $|A| = \begin{vmatrix}3 & 6\\1 & 4\end{vmatrix} = 3\times4-1\times6=6\neq0$

$\because$ $|A|\neq0$ $\therefore$ A की कोटि, $r(A)$ सारणिक का क्रम (order) = 2 उत्तर

उदाहरण 12. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}5 & 10\\3 & 6\end{bmatrix}_{2\times2}$ की कोटि ज्ञात करो।

हल : आव्यूह A का सारणिक, $|A|=\begin{vmatrix}5 & 10\\3 & 6\end{vmatrix}=5\times6-3\times10=0$

$\because$ $|A|=0$ $\therefore A$ की कोटि $\neq 2$

$\Rightarrow$ A की कोटि, $r(A)=1$ ($\because$ कोटि 1 से कम नहीं होती है) उत्तर

उदाहरण 13. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$ की कोटि ज्ञात करो।

हल : $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\times(1-4)-2\times(2-4)+2\times(4-2)=5\neq0$

$\therefore$ $|A|\neq0$ $\therefore$ A की कोटि, $\rho(A)=$ सारणिक का क्रम = 3 उत्तर

उदाहरण 14. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करो।

हल : $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\3 & 4 & 5\end{vmatrix}=1\times(25-24)-2\times(20-18)+3\times(16-15)=0$

$\because$ $|A|=0$ $\therefore$ A की कोटि $\neq3$ $\Rightarrow A$ की कोटि 3 से कम है।

अब यदि कम से कम 1 द्वितीय क्रम का लघु सारणिक ऐसा है कि उसका मान अशून्य है तो आव्यूह A की कोटि 2 होगी और यदि आव्यूह A के द्वितीय क्रम के सभी लघु सारणिक ऐसे हैं कि उनका मान शून्य है तब कोटि 2 से कम होगी।

$\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{vmatrix}=5-8=-3\neq0$ अत: आव्यूह A की कोटि, $\rho(A)=2$ उत्तर

उदाहरण 15. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2 & 7\\5 & 6 & 6 & 8\end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करो।

हल : इसका उच्चतम क्रम का लघु सारणिक द्वितीय क्रम का है अत: A की कोटि 2 से अधिक नहीं हो सकती है। अब

$\because$ $\begin{vmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{vmatrix}=3\times6-4\times5\neq0$ $\therefore$ $\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$ अशून्य आव्यूह है। अत: A की कोटि = 2 उत्तर

उदाहरण 16. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 6 & 6\\2 & 4 & 4\end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करो।

हल : $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 6 & 6\\2 & 4 & 4\end{vmatrix}=1\times(24-24)-2(12-12)+2(12-12)=0$

$\therefore$ $|A|=0$ $\therefore$ कोटि $\neq3$ $\Rightarrow$ कोटि 3 से कम है।

स्पष्ट है कि द्वितीय क्रम के सभी उप-आव्यूह, शून्य आव्यूह हैं चूँकि द्वितीय क्रम के सभी उपसारणिक शून्य है जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

$\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{vmatrix}=0,$ $\begin{vmatrix}2 & 2\\6 & 6\end{vmatrix}=0,$ $\begin{vmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{vmatrix}=0,$ $\begin{vmatrix}6 & 6\\4 & 4\end{vmatrix}=0,$ ... आदि

$\therefore$ कोटि $\neq 2\Rightarrow$ कोटि 2 से कम है। $\because$ कोटि 1 से कम नहीं हो सकती है $\therefore$ कोटि = 1 उत्तर

उदाहरण 17. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}4 & 4 & 0 & 3\\-2 & 3 & -1 & 5\\1 & 4 & 8 & 7\end{bmatrix}_{3\times4}$ की कोटि ज्ञात करो।

हल : $\because$ A एक वर्ग आव्यूह नहीं है अत: इसकी कोटि 4 से कम है। उप-वर्ग आव्यूह,

$B=\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\-2 & 3 & -1\\1 & 4 & 8\end{bmatrix}$ लेने पर, $|B|=\begin{vmatrix}4 & 4 & 0\\-2 & 3 & -1\\1 & 4 & 8\end{vmatrix}=4\times(24+4)-4(-16+1)=172\neq0$

$\Rightarrow$ $[B]$ अव्युत्क्रमणीय (singular) आव्यूह है $\therefore$ B की कोटि = 3 उत्तर

10. आव्यूहों का सामान्य रूप (Normal or Canonical form) :

r कोटि के किसी भी अशून्य आव्यूह को प्रारम्भिक रूपान्तरणों द्वारा

(i) $[I_r]$ (ii) $[I_r : 0]$ (iii) $\begin{bmatrix}I_r\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix}I_r & : & 0\\ \cdots & : & \cdots\\ 0 & : & 0\end{bmatrix}$

में से किसी भी एक के तुल्य आव्यूह में बदला जा सकता है। इन्हें आव्यूह A के सामान्य रूप (normal form) कहते हैं। I_r, r क्रम का इकाई आव्यूह है तथा $\begin{bmatrix}I_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ आव्यूह के प्रमुख विकर्ण में इकाई तत्वों की संख्या, आव्यूह की कोटि होती है।

(i) यदि $A\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, तब आव्यूह A की कोटि 1 है।

(ii) यदि $A\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, तब आव्यूह A की कोटि 2 है।

(iii) यदि $A\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, तब भी आव्यूह A की कोटि 2 है।

(iv) यदि $A\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, तब आव्यूह A की कोटि 3 है।

उदाहरण 18. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & -2\\4 & 0 & 2 & 6\\2 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ को प्रारम्भिक रूपान्तरण (elementary transformation) विधि से सामान्य रूप (Normal or Canonical form) में परिवर्तित कर, कोटि ज्ञात करो।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल :
$$A=\begin{bmatrix}0&1&2&-2\\4&0&2&6\\2&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-2\\0&4&2&6\\1&2&3&1\end{bmatrix}\ (C_{12} \text{ के प्रयोग से})$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-2\\0&4&2&6\\0&2&1&3\end{bmatrix}\ (R_3\to R_3-R_1)$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&4&2&6\\0&2&1&3\end{bmatrix}\ (C_3\to C_3-2C_1 \text{ तथा } C_4\to C_4+2C_1)$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&4&2&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\left(R_3\to R_3-\frac{1}{2}R_2\right)$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\left(C_3\to C_3-\frac{1}{2}C_2 \text{ तथा } C_4\to C_4-\frac{3}{2}C_2\right)$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0\end{bmatrix}\left(C_2\to \frac{1}{4}C_2\right)$$

∵ इस आव्यूह के प्रमुख विकर्ण (leading diagonal) के दो तत्व (elements) इकाई हैं और अन्य सभी तत्त्व शून्य हैं अतः आव्यूह A की कोटि 2 है अर्थात् $\rho(A)=2$ उत्तर

2.11. आव्यूह का सोपानक रूप (Echelon Form of a Matrix) :

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&0&5\\0&1&4&1&7\\0&0&1&6&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

इस आव्यूह में R_4 एक शून्य पंक्ति (zero row) है। अन्य तीन पंक्तियां R_1, R_2, R_3 सभी अशून्य पंक्तियाँ (non-zero rows) हैं और सभी शून्य पंक्ति से पहले हैं। सभी अशून्य पंक्तियों का पहला अशून्य अवयव इकाई है। पहली अशून्य पंक्ति R_1 का पहला अवयव शून्य नहीं है। दूसरी पंक्ति R_2 में पहला अवयव शून्य है तथा तीसरी पंक्ति R_3 में पहले दो अवयव शून्य हैं अर्थात अशून्यों पंक्तियों में इकाई से पहले शून्यों की संख्या बढ़ते क्रम में है।

आव्यूह के इस रूप को आव्यूह का सोपानक रूप (echelon form) कहते हैं।

सोपानक रूप के आव्यूह की कोटि, अशून्य पंक्तियों की संख्या, के बराबर होती है। इस अनुच्छेद का आव्यूह A सोपानक रूप में है। उसमें तीन अशून्य पंक्तियां हैं, अतः उसकी कोटि 3 है।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

आव्यूह की कोटि (Rank of the Matrix) :

एक आव्यूह सोपानक रूप (echelon form) में है यदि
(i) उसमें सभी अशून्य पंक्तियाँ, शून्य पंक्ति (यदि कोई है) से पहले हैं
(ii) अशून्य पंक्तियों में पहला अशून्य अवयव 1 है
(iii) अशून्य पंक्ति में शून्य अवयवों की संख्या अपनी पूर्व अशून्य पंक्ति से अधिक है।
तब आव्यूह की कोटि = सोपानक आव्यूह में अशून्य पंक्तियों की संख्या

उदाहरण 19. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&1&2&4\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करो।

हल : आव्यूह A सोपानक रूप में है और उसमें तीन अशून्य पंक्तियां हैं अतः आव्यूह A की कोटि 3 है अर्थात् $\rho(A)=3$ उत्तर

उदाहरण 20. आव्यूह $\begin{bmatrix}1&3&1&3\\3&10&1&3\\2&4&6&18\end{bmatrix}$ को प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा सोपानक रूप (echelon form) में परिवर्तित कर उसकी कोटि ज्ञात करो।

हल :
$$A=\begin{bmatrix}1&3&1&3\\3&10&1&3\\2&4&6&18\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&1&3\\0&1&-2&-6\\0&-2&4&12\end{bmatrix}(R_2\to R_2-3R_1, R_3\to R_3-2R_1)$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&1&1\\0&1&-2&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}(R_3\to R_3+2R_2)$$ जोकि सोपानक रूप में है।

∵ इसमें अशून्य पंक्तियाँ 2 हैं अतः A की कोटि 2 है। उत्तर

उदाहरण 21. आव्यूह $\begin{bmatrix}1&3&2&4\\2&7&2&10\\5&17&8&28\\3&8&5&16\end{bmatrix}$ को प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा सोपानक रूप में परिवर्तित कर, उसकी कोटि ज्ञात करो।

हल :
$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&4\\2&7&2&10\\5&17&8&28\\3&8&5&16\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&2&4\\0&1&-2&2\\0&2&-2&8\\0&-1&-1&4\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}R_2\to R_2-2R_1\\R_3\to R_3-5R_1\\R_4\to R_4-3R_1\end{matrix}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \to \frac{1}{2}R_3 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to -\frac{1}{3}R_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_4 \to R_4 - R_3$$

जो कि सोपानक रूप में है। इसमें पहली तीन पंक्तियां शून्य पंक्तियां 3 हैं। अतः आव्यूह A की कोटि 3 है अतः $\rho(A) = 3$

उत्तर

अध्यासमाला 2 (3)

निम्न आव्यूहों की कोटि ज्ञात करो—

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

4. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 06)

5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ यदि $a = b \neq c$

निम्न आव्यूहों को प्रारम्भिक रूपान्तरण विधि (elementary transformation method) द्वारा सामान्य रूप (normal form) या सोपानक रूप में परिवर्तित कर कोटि ज्ञात कीजिए—

7. $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 11 \\ 1 & 5 & 7 & 15 \\ 3 & 11 & 13 & 25 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 11 & 1 & 4 \\ 5 & 13 & -1 & -11 \\ -2 & 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

निम्न आव्यूहों की जाति (rank) तथा शून्यता (nullity) ज्ञात कीजिए—

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 15 & -3 & 9 & -21 \end{bmatrix}$

उत्तरमाला 2(3)

1. 3	2. 2	3. 2	4. 1	5. 2	6. 2	7. 2	8. 3
9. 3	10. 3	11. 3	12. 2	13. 3	14. 2	15. 3; 1	16. 2; 1

12. रैखिक समीकरण (Linear Equations) :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \dots\dots + a_{mn} = b_n$$

ये n अज्ञात राशियों $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ की m रैखिक समीकरणें (linear equations) हैं। इन्हें **रैखिक समीकरण निकाय (system of linear equations)** कहते हैं।

हो सकता है कि समीकरण निकाय का केवल एक हल (unique solution) हो अथवा एक से अधिक हल (अनन्त हल) हों और यह भी सम्भव है कि निकाय का कोई भी हल न हो (no solution)।

(i) **यदि समीकरण निकाय का केवल एक हल है अथवा एक से अधिक हल (अनन्त हल) हैं तब निकाय संगत (consistent) कहलाता है।**

(ii) **यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है तब निकाय असंगत (inconsistent) कहलाता है।**

13. आव्यूह विधि (Matrix Method) से समीकरण निकाय का हल ज्ञात करना

विधि नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 22. सिद्ध कीजिए कि समीकरण $2x + 2y + 5z = 11$, $x - 4y + 6z = 4$, $3x + 11y + 13z = 30$ संगत हैं। इनका हल भी ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरणों को आव्यूह रूप अर्थात् $AX = B$ के रूप में लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \\ 3 & 11 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 30 \end{bmatrix}$$

संवर्धित आव्यूह (Augment matrix)

$$G = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & : & 11 \\ 1 & -4 & 6 & : & 4 \\ 3 & 11 & 13 & : & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & : & 4 \\ 2 & 2 & 5 & : & 11 \\ 3 & 11 & 13 & : & 30 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_2)$$

www.polytechniclab.in

Scanned by CamScanner

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & : & 4 \\ 0 & 10 & -7 & : & 3 \\ 0 & 23 & -5 & : & 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} (R_2 \to R_2 - 2R_1) \\ (R_3 \to R_3 - 3R_1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & : & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{10} & : & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{23} & : & \frac{18}{23} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(R_2 \to \frac{1}{10} R_2\right) \\ \left(R_3 \to \frac{1}{23} R_3\right) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & : & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{10} & : & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & \frac{111}{230} & : & \frac{111}{230} \end{bmatrix} (R_3 \to R_3 - R_2) \quad ...(1)$$

जो कि सोपान रूप में है और चूंकि इसमें अशून्य पंक्तियां 3 हैं $\therefore C$ की कोटि $= 3 \Rightarrow \rho\,[AB] = 3$

गुणांक आव्यूह, $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{10} \\ 0 & 0 & \frac{111}{230} \end{bmatrix}$ भी सोपानक रूप में है और इसमें अशून्य पंक्तियां 3 हैं। $\therefore A$ की कोटि भी 3 है

$\Rightarrow \rho\,(A) = 3$

$\because \rho\,(AB) = \rho\,(A)$ तथा $r = n$ (कोटि = अज्ञात राशियों की संख्या)

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत (consistent) है।

(1) में $AX = B$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{10} \\ 0 & 0 & \frac{111}{230} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{3}{10} \\ \frac{111}{230} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x - 4y + 6z = 4 \quad ...(1)$

$y - \frac{7}{10} z = \frac{3}{10} \Rightarrow 10y - 7z = 3 \quad ...(2)$

$\frac{111}{230} z = \frac{111}{230} \Rightarrow z = 1 \quad ...(3)$

(2) से, $10y - 7 \times 1 = 3 \Rightarrow y = 1$

(1) से, $x - 4 \times 1 + 6 \times 1 = 4 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow x = 2, \; y = 1, \; z = 1$ उत्तर

उदाहरण 23. सिद्ध करो कि निम्न समीकरण निकाय $2x - 3y + 5z = 1, 3x + y - z = 2, x + 4y - 6z = 1$ संगत (consistent) है। इनका हल भी ज्ञात करो।

हल: (i) समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में जहाँ A गुणांक आव्यूह है, लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

(ii) संवर्धित आव्यूह (Augmented matrix) $G = [AB]$ को सोपानक रूप (echelon form) में परिवर्तित करो।

$$G = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & : & 1 \\ 3 & 1 & -1 & : & 2 \\ 1 & 4 & -6 & : & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 & : & 1 \\ 3 & 1 & -1 & : & 2 \\ 2 & -3 & 5 & : & 1 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 & : & 1 \\ 0 & -11 & 17 & : & -1 \\ 0 & -11 & 17 & : & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (R_2 \to R_2 - 3R_1) \\ (R_3 \to R_3 - 2R_1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 & : & 1 \\ 0 & -11 & 17 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} (R_3 \to R_3 - R_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 & : & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-17}{11} & : & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \left(R_2 \to -\frac{R_2}{11}\right) \quad ...(2)$$

जो कि सोपानक रूप में है। चूँकि इसमें अशून्य पंक्तियां 2 हैं इसलिए इसकी कोटि $\rho\,(G) = 2$ है।

गुणांक आव्यूह, $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{-17}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ भी सोपानक रूप में है।

$\because$ इसमें भी अशून्य पंक्तियां 2 हैं $\therefore \rho\,(A) = 2$

$\because \rho\,(A) = \rho\,(G) \therefore$ निकाय संगत (consistent) है।

$\because$ कोटि = 2 तथा अज्ञात राशियां = 3 $\Rightarrow r < n$ अर्थात् कोटि, अज्ञात राशियों की संख्या से कम है अत: निकाय के अनन्त हल हैं। अनन्त हल ज्ञात करने के लिए (2) में $AX = B$ के प्रयोग से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{-17}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{11} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 4y - 6z = 1, \quad y - \frac{17}{11} z = \frac{1}{11}$$

$z = k$ लेने पर, $y = \frac{1}{11} + \frac{17k}{11} = \frac{17k + 1}{11}$, $x + \frac{4(17k + 1)}{11} - 6k = 1 \Rightarrow x = \frac{7 - 2k}{11}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{7 - 2k}{11}, \; y = \frac{17k + 1}{11}, \; z = k$ जहाँ k एक नियतांक है।

K को विभिन्न मान दे कर x, y, z के अनन्त मान अर्थात अभीष्ट अनन्त हल प्राप्त किये जा सकते हैं। उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 24. सिद्ध करो कि निकाय समीकरण $x + y + z = 6, 3x + y - 2z = 12, 2x + 4y + 7z = 28$ का कोई हल नहीं है।

हल : समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$

संवर्धित आव्यूह (Augmented matrix)

$$G = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 3 & 1 & -2 & : & 12 \\ 2 & 4 & 7 & : & 8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -5 & : & -6 \\ 0 & 2 & 5 & : & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (R_2 \to R_2 - 3R_1) \\ (R_3 \to R_3 - 2R_1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -5 & : & -6 \\ 0 & 0 & 0 & : & -10 \end{bmatrix} \quad (R_3 \to R_3 + R_2)$$

जो कि सोपानक रूप में है।

अत: G की कोटि = अशून्य पंक्तियों की संख्या = 3 $\Rightarrow \rho(A : B) = 3$

गुणक आव्यूह, $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ भी सोपानक रूप में है।

आव्यूह A की कोटि = अशून्य पंक्तियों की संख्या = 2 $\Rightarrow \rho(A) = 2$

$\because \rho(A) \neq \rho(A : B)$, अत: दिया हुआ समीकरण निकाय असंगत है अर्थात् निकाय का कोई हल नहीं है। (सिद्धम्)

याद रखने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. रैखिक समीकरणें (Linear Equations):

(i) यदि $\rho(A) = \rho(A : B) =$ अज्ञात राशियों की संख्या अर्थात् यदि $r = n$, तब निकाय संगत (consistent) है और निकाय का केवल एक हल (Unique Solution) है।

(ii) यदि $\rho(A) = \rho(A : B)$ लेकिन दोनों की कोटि अज्ञात राशियों से कम है अर्थात् $r < n$, तब भी निकाय संगत है लेकिन निकाय के अनन्त हल (infinite solutions) हैं।

(iii) यदि $\rho(A) \neq \rho(A : B)$ तब निकाय असंगत (inconsistent) है तथा निकाय का कोई हल नहीं है (system has no solution.)।

2. समघात रैखिक समीकरणें (Homogeneous linear Equations) :

यदि समीकरण $AX = O$ रूप की है तब वे समघात रैखिक समीकरणें कहलाती हैं। ऐसी समीकरणों को हल करने के लिए गुणांक आव्यूह A की कोटि ज्ञात करो और

(i) यदि $r = n$ (अज्ञात राशियों की संख्या) तब निकाय संगत (consistent) है और निकाय का अद्वितीय हल (unique solution) $x_1 = x_2 = x_3 = ... = 0$ है। इस प्रकार के हल को निरर्थक हल (Trivial solution) कहते हैं।

(ii) यदि $r < n$ तब भी निकाय संगत (Consistent) है और उसके अनन्त हल (infinite solutions) हैं जो non-trival solutions कहलाते हैं।

उदाहरण 25. समघात रैखिक समीकरणों $3x + y + 9z = 0, 4x - 2y - 3z = 0, 18x - 4y + 9z = 0$ को, गुणांक आव्यूह की कोटि ज्ञात कर हल कीजिए।

हल : समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & -3 \\ 18 & -4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

गुणांक आव्यूह, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & -3 \\ 18 & -4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 18 & -4 & 9 \end{bmatrix} \left(R_1 \to \frac{1}{3}R_1\right)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -15 \\ 0 & -10 & -45 \end{bmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 4R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 13 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (R_2 \to R_2 + 13R_1) \\ (R_3 \to R_3 - 3R_2) \end{matrix}$$

जो कि सोपानक रूप में हैं और उसमें अशून्य पंक्तियाँ 2 हैं।

अत: A की कोटि 2 है अर्थात् $\rho(A) = 2$ जोकि अज्ञात राशियों की संख्या 3 से कम है $\therefore$ समीकरण संगत है और उनके अनन्त हल हैं।

$$3x + y + 9 = 0 \quad \text{तथा} \quad 4x - 2y - 3z = 0$$

$\Rightarrow$ वज्र गुणन रीति से, $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{45} = \dfrac{z}{-10}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x}{-3/2} = \dfrac{y}{-9/2} = \dfrac{z}{1} = k$ (मान लो)

तब $x = \dfrac{-3k}{2}$, $y = \dfrac{-9k}{2}$, $z = k$ से समीकरणों के अनन्त हल ज्ञात किये जा सकते हैं जहाँ $k = 1, 2, 3, ...$ कोई भी नियतांक है।

अभ्यासमाला 2 (4)

निम्न समीकरण निकायों के गुणांक आव्यूहों (coefficient matrices) तथा संवर्धित आव्यूहों (Augmented matrices) की कोटि ज्ञात कर सुनिश्चित कीजिए कि निकाय सुसंगत हैं अथवा असंगत है यदि निकाय संगत है तो उसका हल भी ज्ञात कीजिए।

1. $4x - 2y + 6z = 8$
   $x + y - 3z = -1$
   $15x - 3y + 9z = 21$

2. $2x - y - z = 2$
   $x + 2y + z = 2$
   $4x - 7y - 5z = 2$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

3. $x + y + z = -3$
$3x + y - 2z = -2$
$2x + 4y + 7z = 7$

4. $2x - 3y + 5z = 1$
$3x + y - z = 2$
$x + 4y - 6z = 1$

5. $2x + 3y + 4z = 14$
$x + 5y + 7z = 15$
$3x + 11y + 13z = 29$

6. $4x - 2y + 6z = 8$
$x + y - 3z = -1$
$15x - 3y + 9z = 21$

7. $3x + y - z = 0$
$4x - 2y - 3z = 0$
$2x + 4y + z = 0$

8. $2x + 6y - 3z = 0$
$2x + 10y - 25z = 0$
$x + 6y - 18z = 0$

9. k के किन मानों के लिए समीकरण निकाय $3x - y + kz = 1, 2x + y + z = 2$ तथा $x + 2y - kz = -1$ संगत हैं? (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)

10. λ के किन मानों के लिए समीकरण निकाय $3x + y - \lambda z = 0$, $4x - 2y - 3z = 0$, $2\lambda x + 4y + \lambda z = 0$ के अनन्त हल (infinite solutions) हैं।

उत्तरमाला 2 (4)

1. अनन्त हल हैं; $x = 1, y = 3k - 2, z = k$
2. अनन्त हल हैं; $x = \frac{6+k}{5}, y = \frac{2-3k}{5}, z = k.$
3. समीकरण निकाय असंगत है अतः कोई हल नहीं है।
4. अनन्त हल हैं; $x = \frac{7-2k}{11}, \quad y = \frac{1+17k}{11}, z = k.$
5. संगत; केवल एक हल; $x = 4, y = -2, z = 3$
6. संगत; अनन्त हल; $x = 1, y = 3k - 2, z = k.$
7. अनन्त हल; $x = \frac{k}{2}, \; y = -\frac{k}{2}, z = k.$
8. केवल एक हल; $x = y = z = 0$
9. यदि $k = -\frac{7}{2}$ तब अद्वितीय हल और यदि $k = -\frac{7}{2}$ तब कोई हल नहीं।
10. $\lambda = 1, 9.$

3 आइगेन मान तथा कैले-हैमिल्टन प्रमेय (Eigen Values and Cayley Theorem)

1. **परिभाषायें (Definitions) :**

आइगेन मान ज्ञात करना सीखने के लिए विद्यार्थियों को निम्न पदों का ज्ञान होना जरूरी है।

1. **अभिलक्षणिक आव्यूह (Characteristic Matrix)**—यदि A, n-क्रम का कोई वर्ग आव्यूह है, I उसी क्रम का इकाई आव्यूह है तथा λ कोई अदिश राशि है तो आव्यूह $(A - \lambda I)$ को आव्यूह A का अभिलक्षणिक आव्यूह कहते हैं।

उदाहरणार्थ

यदि $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तब $$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 6 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

यह आव्यूह A का अभिलक्षणिक आव्यूह (characteristic matrix) है।

2. **अभिलक्षणिक बहुपद (Characteristic Polynomial)**—अभिलक्षणिक आव्यूह $A - \lambda I$ के सारणिक $|A - \lambda I|$ को अभिलक्षणिक सारणिक (characteristic determinent) कहते हैं तथा इसे सारणिक के विस्तार (Expansion) को आव्यूह A का अभिलक्षणिक बहुपद कहते हैं। इसे अभिलक्षणिक फलन (characteristic function) भी कहते हैं इसे प्रायः $\phi(\lambda)$ से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरणार्थ : उपरोक्त आव्यूह A के अभिलक्षणिक आव्यूह का सारणिक,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 18] - 2[4 - 2\lambda - 12] + 4[12 - 4 + 4\lambda]$$

$$= (3-\lambda)[2 - 3\lambda + \lambda^2 - 18] - 2(-8 - 2\lambda) + 4[8 + 4\lambda]$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 16) + 16 + 4\lambda + 32 + 16\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda - 48 + 20\lambda + 48$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 27\lambda,$$

आव्यूह A का अभिलक्षणिक बहुपद है। चूँकि यह त्रिघातीय है अतः A की कोटि 3 है आव्यूह A के अभिलक्षणिक बहुपद की घात आव्यूह A की कोटि (order) होती है।

3. **अभिलक्षणिक समीकरण (characteristic equation)**—समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ को आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में, $\lambda^3 - 6\lambda^2 - 27\lambda = 0$, आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4. **अभिलाक्षणिक मूल या आइगेन मान (Characteristic Roots or Eigen Values)**—अभिलक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ के मूलों (roots) को आव्यूह A के अभिलक्षणिक मूल या आइगेन मान कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में,

अभिलक्षणिक समीकरण, $\lambda^3 - 6\lambda^2 - 27\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 6\lambda - 27) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 9) = 0$

$\Rightarrow$ अभिलक्षणिक मूल या आइगेन मान $= 0, -3, 9$

5. **स्पेक्ट्रम (Spectrum)**—आव्यूह A के सभी आइगेन मानों के समूह को आव्यूह A का स्पेक्ट्रम कहते हैं। इस प्रकार, स्पेक्ट्रम $A = \{0, -3, 9\}$

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. **यदि A कोई आव्यूह है तब**
   (i) आव्यूह $(A - \lambda I)$ को अभिलाक्षणिक आव्यूह (Characteristic matrix) कहते हैं।
   (ii) $|A - \lambda I|$ को अभिलाक्षणिक सारणिक कहते हैं और सारणिक का विस्तार (expand) करने पर प्राप्त फलन को अभिलाक्षणिक फलन अथवा अभिलाक्षणिक बहुपद कहते हैं।
   (iii) $|A - \lambda I| = 0$ को अभिलाक्षणिक समीकरण कहते हैं। इस में λ की घात के बराबर आव्यूह A की कोटि (rank) होती है।
   (iv) $|A - \lambda I| = 0$ के मूलों को (λ के मानों को) आव्यूह A के अभिलाक्षणिक मूल या आइगेन मान (Eigen Values) कहते हैं।
   (v) आइगेन मान के मूलों के समूह को आव्यूह A का स्पेक्ट्रम कहते हैं।
2. **आइगेन मानों के गुण (Properties of Eigen Values) :**
   (i) आव्यूह A के आइगेन मानों का गुणनफल, आव्यूह A के सारणिक के मान के बराबर होता है।
   (ii) आव्यूह A के आइगेन मानों का योग, आव्यूह A के ट्रेस (trace) अर्थात् प्रमुख विकर्ण के अवयवों के योग के बराबर होता है।
   (iii) आव्यूह A के आइगेन मान तथा उसके परिवर्त आव्यूह A' के आइगेन मान बराबर होते हैं।

3. **आइगेन सदिश या अभिलक्षणिक सदिश (Eigen Vector or Characteristic Vector) :**

माना कि $\lambda = \lambda_1$, किसी $n \times n$ कोटि के वर्ग आव्यूह का अभिलक्षणिक मूल है, तब समीकरण

$$AX = \lambda X \Rightarrow A.IX = \lambda I.X$$

अर्थात् $(A - \lambda I)X = O$ के अशून्य हल में $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ को अभिलक्षण मूल λ_1 के सापेक्ष, आव्यूह A का आइगेन सदिश अथवा अभिलक्षणिक सदिश कहते हैं।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

आइगेन सदिशों के गुण

1. यदि किसी आव्यूह A के आइगेन मान n हैं तो उसके आइगेन सदिश भी n ही होते हैं (प्रत्येक आइगेन मान के संगत आइगेन सदिश होता है)।
2. यदि आव्यूह A सममित आव्यूह (symmetric matrix) है तो उसके आइगेन सदिशों के युग्म लाम्बिक (orthogonal) होते हैं (eigen vectors are pair- wise orthogonal) अर्थात् यदि किसी सममित आव्यूह के आइगेन सदिश X_1, X_2, X_3 हैं तब $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_3 = X_1 \cdot X_3 = 0$

4. **कैले-हैमिल्टन प्रमेय (Cayley-Hamilton Theorem) :**

प्रत्येक वर्ग आव्यूह अपनी अभिलक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है (Every square matrix satisfies its own characteristic equation) इसका सत्यापन उदाहरण 8 में किया गया है।

5. **कैले-हैमिल्टन प्रमेय के उपयोग (Uses of Cayley-Hamilton Theorem) :**
   1. कैले-हैमिल्टन प्रमेय की सहायता से किसी आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse matrix) ज्ञात किया जा सकता है।
   2. कैले-हैमिल्टन प्रमेय की सहायता से आव्यूह की घातें ज्ञात की जा सकती हैं।

   इनको ज्ञात करने की विधि उदाहरण 9, 10 तथा 11 में समझाई गई है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा स्पेक्ट्रम ज्ञात करो।

हल : $\because$ आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण, $|A - \lambda I| = 0$

$\therefore |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (4 - \lambda)(6 - \lambda) - 15 = 0 \Rightarrow 24 - 10\lambda + \lambda^2 - 15 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1, 9 \Rightarrow A$ के आइगेन मान $= 1, 9$

स्पेक्ट्रम $= \{1, 9\}$ **उत्तर**

उदाहरण 2. निम्न आव्यूह A के सभी अभिलक्षणिक मान तथा उनके संगत अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात करो।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

हल : आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण, $|A - \lambda I| = 0$

$\Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (1 - \lambda)(6 - \lambda) + 4 = 0 \Rightarrow 6 - 7\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 2, 5$

अतः A के अभिलक्षणिक मान $= \lambda = 2, 5$ **उत्तर**

(i) माना $\lambda = 2$ का संगत अभिलक्षणिक सदिश, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ है।

तब $\because$ आव्यूह समीकरण, $(A - \lambda I)X = O$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & -2 \\ 2 & 6-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $-x_1 - 2x_2 = 0$ तथा $2x_1 + 4x_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = -2x_2 \Rightarrow \dfrac{x_1}{-2} = \dfrac{x_2}{1} = k_1$ (मान लो)

$\Rightarrow$ $x_1 = -2k_1, \quad x_2 = k_1$

तब

$\Rightarrow$ $\lambda = 2$ का संगत अभिलक्षणिक सदिश $X = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ले सकते हैं।

(ii) माना कि $\lambda = 5$ का संगत अभिलक्षणिक सदिश, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ है।

तब आव्यूह समीकरण $(A - \lambda I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-5 & -2 \\ 2 & 6-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $-4x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -x_2 \Rightarrow \dfrac{x_1}{-1} = \dfrac{x_2}{2} = k_2$ (मान लो)

तब $x_1 = -k_2, \quad x_2 = 2k_2$

$\Rightarrow$ $\lambda = 5$ का संगत अभिलक्षणिक सदिश, $X = k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $k_2 \neq 0$ ले सकते हैं।

अत: आव्यूह A के अभिलक्षणिक मान $\lambda = 2, 5$ तथा अभिलक्षणिक सदिश $= k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ उत्तर

उदाहरण 3. आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण तथा आइगेन मान ज्ञात करो, यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

हल : आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण, $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 10 & -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $(2-\lambda)\{(-4-\lambda)(6-\lambda) + 20\} + 2\{60 - 10\lambda - 25\} + 3(-40 + 20 + 5\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $(2-\lambda)(-4 - 2\lambda + \lambda^2) + 2(35 - 10\lambda) + 3(-20 + 5\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ अभीष्ट अभिलक्षणिक समीकरण है। उत्तर

$\Rightarrow$ $(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ से $\lambda = 1, 1, 2 \Rightarrow$ आइगेन मान $= 1, 1, 2$ उत्तर

उदाहरण 4. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ के अभिलक्षणिक मान तथा अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात करो।

हल : आव्यूह A के अभिलक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ से

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{...(1)}$$

$\Rightarrow$ $(-2-\lambda)\{(1-\lambda)(6-\lambda) - 4\} - 2\{2(6-\lambda) - 1 \times 2\} + 1\{4 - 1 \times (1-\lambda)\} = 0$

$\Rightarrow$ $(-2-\lambda)\{6 - 7\lambda + \lambda^2 - 4\} - 2\{10 - 2\lambda\} + (3 + \lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $(-2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 2) - 20 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0$

$\Rightarrow$ $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 4 - 17 + 5\lambda = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^3 - 5\lambda^2 - 17\lambda + 21 = 0$

$\Rightarrow$ $(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 7) = 0$

$\Rightarrow$ आव्यूह A के अभिलक्षणिक मान (आइगेन मान), $\lambda = 1, -3, 7$ हैं।

समीकरण (1) में $\lambda = 1$ रखने पर

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ ...(1)

$2x_1 + 2x_3 = 0$ ...(2)

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$ ...(3)

$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

(1) तथा (3) से, $\dfrac{x_1}{2-10} = \dfrac{x_2}{-15-1} = \dfrac{x_3}{2+6}$

$\dfrac{x_1}{-8} = \dfrac{x_2}{-16} = \dfrac{x_3}{8}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x_1}{1} = \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{x_3}{-1} = k_1$ (मान लिया)

$\Rightarrow$ $x_1 = k_1, \quad x_2 = 2k_1, \quad x_3 = -k_1$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ के संगत अभिलक्षणिक/सदिश (आइगेन सदिश)

$$X_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; k_1 \neq 0$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

इसी प्रकार $\lambda = -3$ तथा $\lambda = 7$ के संगत अभिलाक्षणिक सदिश क्रमशः

$$X_2 = k_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ k_2 \neq 0 \quad \text{तथा} \quad X_3 = k_3\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix},\ k_3 \neq 0 \text{ है।}$$ उत्तर

(विद्यार्थी गण स्वयं ज्ञात करें)

उदाहरण 5. आव्यूह $\begin{bmatrix}8 & -6 & 2\\-6 & 7 & -4\\2 & -4 & 3\end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात करो और दिखाओ कि ये सदिश परस्पर लाम्बिक (orthogonal) हैं।

हल : A का अभिलाक्षणिक समीकरण, $|A - \lambda I| = 0$ से

$$\begin{vmatrix}8-\lambda & -6 & 2\\-6 & 7-\lambda & -4\\2 & -4 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0 \qquad ...(1)$$

(सारणिक का विस्तार करने पर)

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 45) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 3, 15$

$\Rightarrow A$ के आइगेन मान, $\quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 15$

समीकरण (1) में $\lambda_1 = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix}8 & -6 & 2\\-6 & 7 & -4\\2 & -4 & 3\end{vmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \qquad ...(1)$

$-6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0 \qquad ...(2)$

$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \qquad ...(3)$

(1) तथा (2) से,

$$\frac{x_1}{24-14} = \frac{x_2}{-12+32} = \frac{x_3}{56-36}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{10} = \frac{x_2}{20} = \frac{x_3}{20}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2} = k_1 \text{ (मान लो)}$$

तब $x_1 = k_1, \ x_2 = 2k_1, \ x_3 = 2k_1 \quad \because$ ये मान समी॰ (3) को सन्तुष्ट करते हैं।

$\therefore \lambda = 0$ के संगत आइगेन सदिश, $\quad X_1 = k_1\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\ k_1 \neq 0$ उत्तर

इसी प्रकार $\lambda_2 = 3$ तथा $\lambda = 15$ के संगत आइगेन सदिश क्रमशः,

$$X_2 = k_2\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix},\ k_2 \neq 0 \qquad \text{तथा} \quad X_3 = k_3\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\ k_3 \neq 0 \text{ है।}$$ (विद्यार्थी स्वयं ज्ञात करें)

$\because \quad X_1 \cdot X_2 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times (-2) = 0$

$X_2 \cdot X_3 = 2 \times 2 + 1 \times (-2) + (-2) \times 1 = 0$

$X_1 \cdot X_3 = 1 \times 2 + 2 \times (-2) + 2 \times 1 = 0$

$\therefore \quad X_1, X_2, X_3$ सदिश परस्पर लाम्बिक (orthogonal) हैं। उत्तर

उदाहरण 6. आव्यूह $A = \begin{bmatrix}4 & -5\\1 & -2\end{bmatrix}$ के आइगन मान तथा आइगन सदिश ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि आव्यूह A अपनी अभिलक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

हल : आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण $|A - I\lambda| = 0$

$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix}4-\lambda & -5\\1 & -2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4-\lambda)(-2-\lambda) + 1 \times 5 = 0$

$\Rightarrow \quad -8 - 2\lambda + \lambda^2 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad ...(1)$

$\Rightarrow \quad (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1, 3$ (आइगेन मान) उत्तर

(i) $\lambda = -1$ लेने पर, समीकरण $(A - I\lambda)X = 0$ से

$$\begin{bmatrix}4+1 & -5\\1 & -2+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}5 & -5\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad 5x_1 - 5x_2 = 0 \qquad ...(2)$

तथा $\quad x_1 - x_2 = 0 \qquad ...(3)$

स्पष्ट है कि (2) तथा (3) का अशून्य हल सदिश $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \lambda = -1$ के संगत, A का आइगेन सदिश, $\quad X_1 = k_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, k_1 \neq 0$

(ii) $\lambda = 3$ लेने पर, समीकरण $(A - I\lambda)X = 0$ से

$$\begin{bmatrix}4-3 & -5\\1 & -2-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & -5\\1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x_1 - 5x_2 = 0 \quad \Rightarrow$ सदिश $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$ अशून्य हल है।

$\Rightarrow \lambda = 3$ के संगत आइगेन सदिश $\quad X_2 = k_2\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, k_2 \neq 0$

आव्यूह A, अभिलक्षणिक समीकरण $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ को सन्तुष्ट करता है यदि

$A^2 - 2A - 3I = 0 \qquad ...(4)$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-5 & -20+10 \\ 4-2 & -5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

समीकरण (4) में A^2, A तथा I के मान रखने पर,

$$A^2 - 2A - 3I = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11-8-3 & -10+10+0 \\ 2-2+0 & -1+4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$\Rightarrow$ आइगेन सदिश $= k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ हैं तथा आव्यूह A अपनी अभिलक्षणिक समीकरण (1) को सन्तुष्ट करता है। उत्तर

उदाहरण 7. आव्यूह $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ के आइगेन मान, अभिलक्षणिक समीकरण, अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि आव्यूह A, अभिलक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

(i) आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण, $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 5 & 2-\lambda & 6 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (1-\lambda)\{(2-\lambda)(-3-\lambda)+6\} - 1\{5(-3-\lambda)+12\} + 3\{-5+2(2-\lambda)\} = 0$

$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\{\lambda+\lambda^2\} - 1\{-3-5\lambda\} + 3\{-1-2\lambda\} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 + 3 + 5\lambda - 3 - 6\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 = 0$

$\lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0$ (आइगेन मान) उत्तर

(ii) अभिलक्षणिक समीकरण, $\lambda^3 = 0$ उत्तर

(iii) $(A - \lambda I)X = 0$ से

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 5 & 2-\lambda & 6 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\because \lambda = 0)$$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ ...(1)

$5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0$ ...(2)

$\Rightarrow \quad -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$ ...(3)

समी० (1) तथा (2) से, $\dfrac{x_1}{6-6} = \dfrac{x_2}{15-6} = \dfrac{x_3}{2-5}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x_1}{0} = \dfrac{x_2}{9} = \dfrac{x_3}{-3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x_1}{0} = \dfrac{x_2}{3} = \dfrac{x_3}{-1} = k$ (मान लो)

तब $x_1 = 0, \quad x_2 = 3k, \quad x_3 = -k$

$\Rightarrow \lambda = 0$ के संगत, अभिलक्षणिक सदिश $X = k\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ उत्तर

(iv)
$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9 \\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18 \\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\because \quad A^3 = 0 \Rightarrow$ आव्यूह A, अभिलक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है। (सिद्धम्)

उदाहरण 8. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित (verify) करो। A का व्युत्क्रम आव्यूह भी ज्ञात करो।

हल : आव्यूह A का अभिलक्षण समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 \times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ ...(1)

$\Rightarrow$ आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

आव्यूह A, अपनी अभिलक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है यदि, $A^2 - 4A - 5I = O$ ...(2)

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8 & 4+12 \\ 2+6 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

A^2, A तथा I के मान (2) में रखने पर,

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -16 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 16-16+0 \\ 8-8+0 & 17-12-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A, अपनी अभिलाक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है अतः कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित होता है।

उदाहरण 9. कैले-हैमिल्टन के प्रयोग से आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse matrix) ज्ञात करो।

हल : आव्यूह A का अभिलाक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (6-\lambda)(4-\lambda) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 8$$

$\Rightarrow$ आव्यूह A का अभिलाक्षणिक समीकरण $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$

$\because$ आव्यूह A, अपनी अभिलाक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है

$$\therefore \quad A^2 - 10A + 16I = 0 \qquad \ldots(1)$$

व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करने के लिए समीकरण (1) को A^{-1} से गुणा करने पर

$$A^{-1}.A^2 - 10A^{-1}.A + 16A^{-1}.I = 0$$

$$\Rightarrow \quad A - 10I + 16A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 16A^{-1} = -A + 10I = -\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, तब कैले-हैमिल्टन के प्रयोग से $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : अभिलाक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ से

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \qquad \ldots(1)$$

कैले-हैमिल्टन प्रमेय से, आव्यूह A, समीकरण (1) अर्थात् $A^2 - 4A - 5I = 0$ को सन्तुष्ट करता है।

$$A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I = A^3(A^2 - 4A - 5) - 2A^3 + 11A^2 - A - 10I$$

$$= A^3(A^2 - 4A - 5I) - 2A(A^2 - 4A - 5) + 3A^2 - 11A - 10I$$

$$= A^3 \times 0 - 2A(A^2 - 4A - 5I) + 3(A^2 - 4A - 5I) + A + 5I$$

$$= -2A \times 0 + 3 \times 0 + A + 5I$$

$$= A + 5I = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 11. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित करो। इस प्रमेय के प्रयोग से A^{-1} तथा A^4 के मान ज्ञात करो।**

हल : आइगेन समीकरण $|A - I\lambda| = 0$ से,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

सारणिक का विस्तार करने पर, $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 1 = 0 \qquad \ldots(1)$

कैले-हैमिल्टन प्रमेय के अनुसार आव्यूह A, समीकरण (1) को सन्तुष्ट करता है।

$$\therefore \quad A^3 - 5A^2 + 9A - I = O$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 12 & -4 \\ -4 & 7 & 2 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -1 & 12 & -4 \\ -4 & 7 & 2 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 42 & -2 \\ -11 & 9 & 10 \\ 10 & -22 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 5A^2 + 9A - I = \begin{bmatrix} -13 & 42 & -2 \\ -11 & 9 & 10 \\ 10 & -22 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -60 & 20 \\ 20 & -35 & -10 \\ -10 & 40 & -5 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 9 & 18 & -18 \\ -9 & 27 & 0 \\ 0 & -18 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$ अतः कैले-हैमिल्टन सत्यापित है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

कैले-हैमिल्टन के प्रयोग से A^{-1} ज्ञात करने के लिए,

$$\because \quad A^3 - 5A^2 + 9A - I = 0$$

$$\therefore \quad A^{-1}A^3 - 5\times A^{-1}A^2 + 9\times A^{-1}A - A^{-1}I = 0$$

$$\Rightarrow \quad A^2 - 5A + 9I - A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = A^2 - 5A + 9I$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 12 & -4 \\ -4 & 7 & 2 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-5+9 & 12-10+0 & -4+10+0 \\ -4+5+0 & 7-15+9 & 2+0+0 \\ 2+0+0 & -8+10+0 & 1-5+9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ उत्तर

कैले-हैमिल्टन के प्रयोग से A^4 का मान ज्ञात करना—

$A^3 - 5A^2 + 9A - I = 0$ को A से गुणा करने पर,

$$A^4 - 5A^3 + 9A^2 - A = 0$$

$$\Rightarrow \quad A^4 = 5A^3 - 9A^2 + A \qquad \text{...(2)}$$

$$= 5(A^3 - 5A^2 + 9A) + 16A^2 - 44A$$

$$= 5\times I + 16A^2 - 44A$$

$$= 16\begin{bmatrix} -1 & 12 & -4 \\ -4 & 7 & 2 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} - 44\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16-44+5 & 192-88+0 & -64+88+0 \\ -64+44+0 & 112-132+5 & 32+0+0 \\ 32+0+0 & -128+88+0 & 16-44+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 & 104 & 24 \\ -20 & -15 & 32 \\ 32 & -40 & -23 \end{bmatrix}$$ उत्तर

नोट—समीकरण (2) से भी A^3, A^2 तथा A के मान रख कर A^4 का मान ज्ञात कर सकते हैं चूँकि A^3, A^2 के मान तो हम ज्ञात कर ही चुके हैं।

उदाहरण 12. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तो $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ का मान ज्ञात करो।

हल : आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$$ (विस्तार करने पर)

कैले-हैमिल्टन प्रमेय से, $A^3 - 5A^2 + 7A - 3I = 0$ ...(1)

$$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I \qquad \text{...(2)}$$

$$= A^5(A^3 - 5A^2 + 7A - 3I) + A(A^3 - 5A^2 + 7A - 3I) + A^2 + A + I$$

$$= A^5\times 0 + A\times 0 + A^2 + A + I = A^2 + A + I$$

$$A^2 = A\times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{अभीष्ट मान} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 13. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ का अभिलक्षणिक समीकरण, आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\{(4-\lambda)(9-\lambda) - 36\} - 2\{2(9-\lambda) - 18\} + 3\{12 - 3(4-\lambda)\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\{36 - 13\lambda + \lambda^2 - 36\} + 4\lambda + 9\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)(\lambda^2 - 13\lambda) + 4\lambda + 9\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 13\lambda - \lambda^3 + 13\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda^3 + 14\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 14) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 0, 14$$

$\lambda = 1$ के संगत आइगेन सदिश

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 2 & 3 \\ 2 & 4-0 & 6 \\ 3 & 6 & 9-0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \qquad \text{...(1)}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \qquad \text{...(2)}$$

$$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \qquad \text{...(3)}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

ये तीनों समीकरण $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ के तुल्य हैं।

(i) $x_3 = 0$ लेने पर, $x_1 = -2x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{-2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{0} = k_1$

$\Rightarrow$ $\lambda = 0$ के संगत आइगेन सदिश, $X_1 = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ उत्तर

(ii) इसी प्रकार $\lambda = 14$ के संगत आइगेन सदिश, $X_3 = k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, (विद्यार्थी स्वयं ज्ञात करें।) उत्तर

अभ्यासमाला 3

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ की अभिलक्षणिक समीकरण, आइगेन मान तथा स्पैक्ट्रम ज्ञात करो।

2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ का आइगेन मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

3. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा उनके संगत आइगेन सदिश ज्ञात करो।

4. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा उनके संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।

5. आव्यूह $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ की अभिलक्षणिक समीकरण, अभिलक्षणिक मूल, मूलों के संगत अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात करो और सिद्ध करो कि आव्यूह A अपनी अभिलक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है। यह भी सिद्ध करो कि आव्यूह के सदिश परस्पर लाम्बिक हैं।

6. अभिलक्षणिक समीकरण, आइगेन मान तथा आइगेन सदिश को परिभाषित कीजिए।

7. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ की अभिलक्षणिक समीकरण, आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात करो।

8. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

9. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित करो तथा A का व्युत्क्रम आव्यूह A^{-1} ज्ञात करो।

10. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित करो और इस प्रमेय के प्रयोग से $A^5 - 4A^4 - 5A^3 + 2A^2 - 4A - 7I$ का मान ज्ञात करो।

संकेत : आव्यूह A की अभिलक्षणिक समीकरण, $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ ...(1)

$\therefore$ कैले-हेमिल्टन प्रमेय से, $A^2 - 4A - 5I = O$ ...(2)

$$A^5 - 4A^4 - 5A^3 + 2A^2 - 4A - 7I$$
$$= A^3(A^2 - 4A - 5I) + 2(A^2 - 4A - 5I) + 4A + 3I$$
$$= A^3 \times 0 + 2 \times 0 + 4A + 3I = 4A + 3I$$
$$= 4\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$ उत्तर

11. कैले-हैमिल्टन प्रमेय को समझाइए तथा उसके प्रयोग से आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह A^{-1} ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)

12. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का अभिलक्षणिक समीकरण ज्ञात करो तथा कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित करो। इस प्रमेय की सहायता से $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

13. दिखाओ की किसी वर्ग आव्यूह A तथा उसके परिवर्त आव्यूह (Transpose matrix) A' के अभिलक्षणिक समीकरण समान (same) होते हैं।

14. यदि λ, किसी वर्ग आव्यूह A का अभिलक्षणिक मान है तो दिखाओ कि

(i) $(A + kI)$ का अभिलक्षणिक मान $\lambda + k$ है। (ii) k, A का अभिलक्षणिक मान $k\lambda$ है।

(iii) A^{-1} का अभिलक्षणिक मान $\frac{1}{\lambda}$ है। (iv) A^2 का अभिलक्षणिक मान λ^2 है।

15. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ का अभिलक्षणिक बहुपद, अभिलक्षणिक समीकरण, आइगेन मान तथा स्पैक्ट्रम ज्ञात करो। कैले-हैमिल्टन प्रमेय के प्रयोग से A^3 तथा A^{-1} के मान भी ज्ञात करो।

16. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ के लिए कैले- हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उत्तरमाला 3

1. $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$; $\lambda = 2, 7$; स्पेक्ट्रम $= \{2, 7\}$

2. $\lambda = \pm 1$

3. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$; सदिश $X_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ तथा $X_2 = k_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1; X_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; X_2 = k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; X_3 = k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32 = 0; \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 8; X_1 = k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; X_2 = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0; \lambda = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 5; X_1 = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $\lambda = 1, 2, 3$

9. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -11 & 16 & 10 \\ -10 & 4 & 8 \\ -7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

11. $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -4 & 3 & 10 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$; $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

16. $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$; $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$; $\lambda = 1, -2, 3$; $\{1, -2, 3\}$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \\ 8 & -4 & 14 \end{bmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

खण्ड-2

साधारण अवकल समीकरणें
(ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4

प्रथम कोटि के अवकल समीकरण
(Differential Equations of First Order)

1. अवकल समीकरणें (Differential Equations) :

वे समीकरणें जिनमें स्वतन्त्र चर, परतन्त्र चर तथा अवकल गुणांक होते हैं, अवकल समीकरणें कहलाती हैं। निम्न समीकरणें अवकल समीकरणें हैं।

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 2y + 4}{2x + y - 2}$

2. $xdy + ydx = 0$

3. $2y^2dx + 3x^2dy = 0$

4. $4\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} - y = 0$

5. $3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + y = 0$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y$

7. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \cos x$

8. $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = \rho\frac{d^2y}{dx^2}$

9. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = 0$

10. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$

2. साधारण अवकल समीकरणें (Ordinary Differential Equations) :

वे अवकल समीकरणें, जिनमें केवल एक स्वतन्त्र चर होता है, साधारण अवकल समीकरणें कहलाती हैं। ऐसी समीकरणों का सामान्य रूप (general form) $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ है। उपरोक्त सभी समीकरणें साधारण अवकल समीकरणें हैं।

3. आंशिक अवकल समीकरणें (Partial Differential Equations) :

वे समीकरणें, जिनमें दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर तथा इन स्वतन्त्र चरों के सापेक्ष आंशिक अवकलज (partial derivatives) होते हैं, आंशिक अवकल समीकरणें कहलाती हैं। निम्न समीकरण आंशिक अवकल समीकरणें हैं।

1. $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 4z,$

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + k.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$

4. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k.\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2$ आदि।

4. अवकल समीकरण की कोटि तथा घात (Order and degree of Differential Equation) :

किसी अवकल समीकरण की कोटि उसमें उपस्थित महत्तम अवकलज (highest derivative) की कोटि होती है और समीकरण की घात (degree), महत्तम अवकलज की घात के बराबर होती है, जब समीकरण में उपस्थित अवकल गुणांक भिन्नात्मक घातों एवं करणी चिन्हों से स्वतन्त्र (free of radical signs) हैं। अनुच्छेद 1 में,

समीकरण (1), (2), (3) प्रथम कोटि, प्रथम घात की समीकरणें हैं, समीकरण (4), (5), (6) द्वितीय कोटि, प्रथम घात की समीकरणें हैं, समीकरण (7) तृतीय कोटि, प्रथम घात की समीकरण है, समीकरण (8), (9) द्वितीय कोटि, द्वितीय घात की समीकरणें हैं, समीकरण (10) प्रथम कोटि, द्वितीय घात की समीकरण है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

5. अवकल समीकरण का बनाना (Formation of Differential Equation) :

दी हुई समीकरण को अवकलित करके उसमें उपस्थित स्वेच्छ अचरों (arbitrary constants) को विलुप्त कर देने पर अवकल समीकरण प्राप्त हो जाती है। अवकलन अधिक से अधिक उतनी बार किया जा सकता है जितने समीकरण में स्वेच्छ अचर हैं। (देखो उदाहरण 3 से 9)

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. निम्न समीकरणों की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए—

(i) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$ (ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = 0$ (iii) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3} = k\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$

हल : (i) ∵ समीकरण में महत्तम अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है जिसकी घात 2 है अतः यह समीकरण द्वितीय कोटि एवं द्वितीय घात की है।

(ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{1/2} \Rightarrow x^4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ (करणी चिन्हों से स्वतन्त्र)

⇒ समीकरण द्वितीय कोटि तथा द्वितीय घात की है। उत्तर

(iii) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3} = k\frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2 = k^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$ (करणी चिन्हों से स्वतन्त्र)

⇒ समीकरण द्वितीय कोटि तथा तृतीय घात की है। उत्तर

उदाहरण 2. समी० $y = c_1\sin(x+c_2) + c_3\cos(x-c_4) + (c_5+c_6)e^{2x+c_7}$ की अवकल समीकरण की कोटि ज्ञात करो।

हल : $y = c_1\sin(x+c_2) + c_3\cos(x-c_4) + (c_5+c_6)e^{2x+c_7}$

$= c_1\sin(x+c_2) + c_3\cos(x-c_4) + (c_5+c_6)e^{2x}\times e^{c_7}$

$= c_1\sin(x+c_2) + c_3\cos(x-c_4) + [(c_5+c_6)e^{c_7}]e^{2x}$

$= c_1\sin(x+c_2) + c_3\cos(x-c_4) + ke^{2x}$

∵ इसमें स्वेच्छ अचरों (arbitrary constants) की संख्या 5 है अतः समीकरण को 5 बार अवकलित किया जा सकता है जिससे 5 कोटि की अवकल समीकरण प्राप्त होगी। उत्तर

उदाहरण 3. समीकरण $ax + by + c = 0$ की अवकल समीकरण ज्ञात करो।

हल : $ax + by + c = 0$ में तीन स्वेच्छ अचर हैं अतः इसे तीन बार अवकलित कर सकते हैं।

अवकलित करने पर, $a + b\frac{dy}{dx} = 0$ या $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$

पुनः अवकलित करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ जो कि द्वितीय कोटि की अवकल समीकरण है। उत्तर

उदाहरण 4. समीकरण $y = A\cos x + B\sin x$ से A तथा B विलुप्त कर अवकल समीकरण बनाओ।

हल : ∵ $y = A\cos x + B\sin x$

∴ $\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$

पुनः अवकलित करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x = -(A\cos x + B\sin x) = -y$

⇒ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ अभीष्ट अवकल समीकरण है। उत्तर

उदाहरण 5. समीकरण $xy = Ae^x + Be^{-x} + x^2$ का अवकल समीकरण बनाओ।

हल : $xy = Ae^x + Be^{-x} + x^2$

अवकलित करने पर, $x\frac{dy}{dx} + y = Ae^x - Be^{-x} + 2x$

पुनः अवकलित करने पर, $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = Ae^x + Be^{-x} + 2$

या $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = xy - x^2 + 2$ उत्तर

उदाहरण 6. दिखाओ कि अवकल समीकरण, $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ का हल $y^2 = a(x+b)$ है।

हल : $y^2 = ax + ab$

अवकलित करने पर, $2y\times\frac{dy}{dx} = a + 0$ या $y\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2}$

पुनः अवकलित करने पर, $y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ या $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

जो कि दी हुई अवकल समीकरण है।

अतः दी हुई समीकरण का हल $y^2 = a(x+b)$ है। सिद्धम्

उदाहरण 7. उन वृत्तों का अवकल समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र y-अक्ष पर हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

हल : माना कि वृत्त का केन्द्र, जो y अक्ष पर है, $(0, b)$ है तथा त्रिज्या b है तब वृत्त की समीकरण

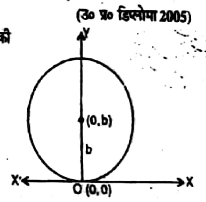
$(x-0)^2 + (y-b)^2 = b^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2by = 0$ ...(1)

अवकलित करने पर, $2x + 2y\times\frac{dy}{dx} - 2b\times\frac{dy}{dx} = 0$

⇒ $x + y\frac{dy}{dx} - \left(\frac{x^2+y^2}{2y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$

[(1) से b का मान रखने पर]

⇒ $2xy + (2y^2 - x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ उत्तर



चित्र 4·1

उदाहरण 8. ऐसे परवलयों का अवकल समीकरण ज्ञात करो जिनके नाभिलम्ब $4a$ के बराबर हैं तथा अक्ष, x-अक्ष के समान्तर है।

हल : माना कि परवलय का शीर्ष (h, k) है। चूँकि परवलय का अक्ष, x-अक्ष के समानान्तर है तथा नाभिलम्ब $4a$ है अतः

परवलय का समी० $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

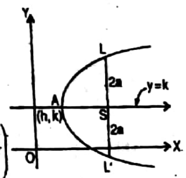
अवकलित करने पर, $2(y-k)\times y_1 = 4a(1-0)$

⇒ $(y-k)y_1 = 2a$ ...(1)

पुनः अवकलित करने पर, $(y_1 - 0)y_1 + (y-k)y_2 = 0$

⇒ $y_1^2 + \frac{2a}{y_1}\times y_2 = 0 \quad \left(\because (1) \text{ से } y-k = \frac{2a}{y_1}\right)$

⇒ $y_1^3 + 2ay_2 = 0$ उत्तर



चित्र 4·2

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 9. समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए।

हल :
$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \quad ...(1)$$

इस समीकरण में h तथा k दो स्वेच्छ अचर हैं। इन्हें विलोपित कर अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए समीकरण (1) को दोबार अवकलित करो।

समी० (1) को अवकलित करने पर,
$$2(x-h)+2(y-k)\frac{dy}{dx}=0 \quad ...(2)$$

पुन: अवकलित करने पर,
$$2(1-0)+2(y-k)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}-0\right)\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad 1+(y-k)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad y-k=-\frac{1+(dy/dx)^2}{(d^2y/dx^2)}$$

समी० (2) में $(y-k)$ का मान रखने पर,
$$(x-h)-\frac{1+(dy/dx)^2}{(d^2y/dx^2)}\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-h)=\frac{\left[1+(dy/dx)^2\right]\frac{dy}{dx}}{(d^2y/dx^2)}$$

$(x-h)$ तथा $(y-k)$ के मान समी० (1) में रखने पर,
$$\frac{[1+(dy/dx)^2]^2\times\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{(d^2y/dx^2)^2}+\frac{[1+(dy/dx)^2]^2}{(d^2y/dx^2)^2}=a^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

जो कि दी हुई समीकरण का अवकल समीकरण है। इस समीकरण की कोटि 2 तथा घात भी 2 है। उत्तर

अभ्यासमाला 4 (1)

1. निम्न अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए— (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (ii) $\left[5+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/3}=x^5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\left[y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$

(iv) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^{2/3}-6\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+4\frac{dy}{dx}=4$ (v) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=a(x-y)$

2. समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+\frac{4(d^2y/dx^2)^3}{(d^3y/dx^3)}+\frac{d^3y}{dx^3}=x^2-1$ की कोटि तथा घात ज्ञात करो।

3. समीकरण $y^2=2a(x+\sqrt{a})$ की कोटि तथा घात ज्ञात करो।

4. समीकरण $y=(c_1+c_2)\cos(x+c_3)-c_4e^{x+c_5}$ की कोटि ज्ञात करो।

5. निम्नलिखित समीकरणों के अवकल समीकरण ज्ञात करो—
(i) $y=mx+c$ (ii) $y=Ae^{3x}+Be^{5x}$ (iii) $y=e^{cx}$ (iv) $y=e^x(A\cos x+B\sin x)$

6. समीकरण $y=ae^{2x}+be^{-3x}+ce^x$ का संगत अवकल समीकरण ज्ञात करो, जहाँ a, b, c स्वेच्छ अचर हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

7. उस सरल आवर्त गति (S.H.M.) का अवकल समीकरण ज्ञात करो जिस सरल आवर्त गति का व्यापक समीकरण $x=a\cos(\omega t+\phi)$ है।

8. समीकरण $xy=Ae^{2x}+Be^{-2x}+3x^2$ का अवकल समीकरण ज्ञात करो।

9. ऐसे सभी वृत्तों का अवकल समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र x-अक्ष पर हैं।

10. किसी समतल में स्थित उन सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण ज्ञात करो जो ऊर्ध्वाधर (vertical) नहीं हैं।

11. सिद्ध करो कि x-अक्ष को अक्ष मानकर खींचे गये परवलयों का अवकल समीकरण $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ है।

12. सिद्ध करो कि उन परवलयों का अवकल समीकरण, जिनकी नाभियाँ मूल बिन्दु पर हैं तथा अक्ष, x-अक्ष पर है $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$ है।

13. सिद्ध करो कि परवलयों के समुदाय का अवकल समीकरण, जिनके नाभिलम्बों की लम्बाइयाँ $4a$ हैं तथा अक्ष, x-अक्ष के समान्तर हैं, $2a\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$ है।

14. सिद्ध करो कि अवकल समीकरण $\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{2}{t}\frac{dv}{dt}=0$ का हल $v=\frac{A}{t}-B$ है।

15. सिद्ध करो कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sec x$ का हल $y=A\cos x+\sin x$ है।

16. समीकरण $y=Ax^2+Bx$ का अवकल समीकरण ज्ञात करो।

17. सिद्ध करो कि अवकल समीकरण $x\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=y\frac{dy}{dx}$ का हल $Ax^2+By^2=1$ है।

18. $y=Ae^{2x}-Be^{-x}$ का संगत अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

उत्तरमाला 4 (1)

1. (i) 2 (ii) 2; 3 (iii) 2; 4 (iv) 4; 2 (v) 1; 1 2. 3; 2

3. 1; 3 4. 3 5. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+15y=0$

(iii) $y\log y=x\frac{dy}{dx}$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$ 6. $\frac{d^3y}{dx^3}-7\frac{dy}{dx}+6y=0$

7. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 8. $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=4(xy-3x^2)+6$ 9. $2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0$

10. $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 16. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x^2}=0$ 18. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2y=0$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

6. अवकल समीकरणों को हल करना (To Solve Differential Equations) :

आगे प्रथम कोटि तथा प्रथम घात (first order and first degree) की विभिन्न प्रकार की समीकरणों को हल किया गया है।

TYPE–I

7. चर राशियों में पृथक्करणीय समीकरणें (Variables Separable Type Equations) :

ये वे समीकरणें हैं जो $f(x)\,dx + F(y)\,dy = 0$ के प्रारूप की होती हैं या इस रूप में ढाली जा सकती हैं। ऐसी समीकरणों का हल प्रत्येक पद को अलग-अलग समाकलित कर प्राप्त किया जाता है, अर्थात् इस प्रकार की समीकरणों का हल,

$$\int f(x)\,dx + \int F(y)\,dy = C$$ है, जहाँ 'C' समाकलन स्थिरांक है।

उदाहरण 10. समीकरण $(3 + 2x)\,dx + (1 + 3y^2)\,dy = 0$ को हल करो।

हल : ∵ $$(1 + 3y^2)\,dy = -(3 + 2x)\,dx$$

∴ $$\int (1 + 3y^2)\,dy = -\int (3 + 2x)\,dx$$

⇒ $$y + y^3 = -(3x + x^2) + C$$

⇒ $$3x + x^2 + y + y^3 = C$$ उत्तर

उदाहरण 11. समीकरण $(1 + y)\,xy\dfrac{dy}{dx} = (1 - x^2)(1 - y)$ को हल करो।

हल : $$(1 + y)\,xy\frac{dy}{dx} = (1 - x^2)(1 - y)$$

⇒ $$\frac{(1 + y)\,y}{1 - y}\,dy = \frac{1 - x^2}{x}\,dx$$

⇒ $$\int \frac{y + y^2}{1 - y}\,dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

⇒ $$\int \left(-y - 2 + \frac{2}{1 - y}\right)dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

⇒ $$\frac{-y^2}{2} - 2y - 2\log(1 - y) = \log x - \frac{x^2}{2} + C$$

⇒ $$\frac{x^2}{2} - \log x - \frac{y^2}{2} - 2y - 2\log(1 - y) = C$$ उत्तर

उदाहरण 12. समी० $(1 + x)\dfrac{dy}{dx} = 3 + y$ को हल करो।

हल : ∵ $$(1 + x)\frac{dy}{dx} = 3 + y \Rightarrow \frac{dy}{3 + y} = \frac{dx}{1 + x}$$

⇒ $$\int \frac{dy}{3 + y} = \int \frac{dx}{1 + x}$$

⇒ $$\log(3 + y) = \log(1 + x) + \log C$$

⇒ $$\log(3 + y) = \log C(1 + x)$$

⇒ $$3 + y = C(1 + x)$$ उत्तर

नोट : समाकलन करने पर, समाकलन स्थिरांक C न लेकर $\log C$ लिया गया है जिससे अगली क्रिया में log समाप्त हो गया है और सरल हल (Simple solution) प्राप्त हो गया है।

उदाहरण 13. समीकरण $(1 + x^2)\,dy - xy\,dx = 0$ को हल करो।

हल : $$(1 + x^2)\,dy - xy\,dx = 0$$

⇒ $$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{1 + x^2}$$

⇒ $$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x\,dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1 + x^2}$$

⇒ $$\log y = \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + \log C$$

⇒ $$\log y = \log(1 + x^2)^{1/2} + \log C$$

⇒ $$\log y = \log\left[C\sqrt{(1 + x^2)}\right]$$

⇒ $$y = C\cdot\sqrt{(1 + x^2)}$$ उत्तर

TYPE–II

8. चरों के पृथक्करणीय रूप में परिवर्तनशील समीकरणें (Equations Reducible to Variables Separable) :

> यदि समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ प्रकार की है तो $(ax + by + c)$ को z मान लो और तब अवकलित कर, $\dfrac{dy}{dx}$ को $\dfrac{dz}{dx}$ में परिवर्तित कर दो। इससे समी० प्रथम रूप अर्थात् $f(x)\,dx + F(y)\,dy = 0$ में परिवर्तित हो जायेगी। अब प्रत्येक पद को अलग-अलग समाकलित कर दो।

उदाहरण 14. समीकरण $(x + y)^2\dfrac{dy}{dx} = a^2$ को हल करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

हल : इस समीकरण में x को y से अलग नहीं किया जा सकता। लेकिन यदि $(x + y)$ को z मान लिया जाये तो समी० चरों के पृथक्करणीय (variables separable) रूप में आ जायेगी और सीधे समाकलित करने पर हल हो जायेगी। अतः

माना कि $x + y = z$ तब $1 + \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 1$

दी हुई समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर,

$$z^2\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2 \Rightarrow z^2\frac{dz}{dx} = a^2 + z^2 \Rightarrow \frac{z^2}{a^2 + z^2}\,dz = dx$$

$$\int \frac{z^2}{a^2 + z^2}\,dz = \int 1 . dx$$

⇒ $$\int \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + z^2}\right)dz = \int 1\,dx$$

⇒ $$z - a^2\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} = x + C$$

z का मान रखने पर, $$(x + y) - a\tan^{-1}\left(\frac{x + y}{a}\right) = x + C$$

⇒ $$y = a\tan^{-1}\left(\frac{x + y}{a}\right) + C$$ उत्तर

www.polytechnicbihar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 15. समीकरण $(x-y)^2\frac{dy}{dx} = 2x - 2y + 3$ को हल करो।

हल :

$$(x-y)^2\frac{dy}{dx} = 2x - 2y + 3$$

$$\Rightarrow \quad (x-y)^2\frac{dy}{dx} = 2(x-y) + 3$$

$x - y = z$ रखने पर, $\quad 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$

$$\therefore \quad z^2\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = 2z + 3$$

$$\Rightarrow \quad z^2\frac{dz}{dx} = z^2 - 2z - 3 \Rightarrow \frac{z^2}{z^2 - 2z - 3}dz = dx$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{2z+3}{z^2 - 2z - 3}\right)dz = dx \Rightarrow \left[1 + \frac{2z+3}{(z-3)(z+1)}\right]dz = dx$$

बायें पक्ष में, आंशिक भिन्नें बनाकर समाकलित करने पर,

$$\int \left[1 + \frac{9}{4}\frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)}\right]dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad z + \frac{9}{4}\log(z-3) - \frac{1}{4}\log(z+1) = x + C$$

$$\Rightarrow \quad x - y + \frac{9}{4}\log(x-y-3) - \frac{1}{4}\log(x-y+1) = x + C$$

$$\Rightarrow \quad -y + \frac{9}{4}\log(x-y-3) - \frac{1}{4}\log(x-y+1) = C$$

उत्तर

उदाहरण 16. समीकरण $(a^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x+y)^2\,dy = 0$ को हल कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)

हल : $\quad (a^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x+y)^2\,dy = 0$

$$\Rightarrow \quad (a^2 - 2xy - y^2) = (x+y)^2\frac{dy}{dx}$$

$x + y = v$ i.e. $y = v - x$ तथा $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$ रखने पर,

$$a^2 - 2x(v-x) - (v-x)^2 = v^2\left(\frac{dv}{dx} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad v^2\frac{dv}{dx} - v^2 = a^2 - 2vx + 2x^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2\frac{dv}{dx} = a^2 + x^2 \quad \text{(Type–I)}$$

$$\Rightarrow \quad \int v^2 dv = \int (a^2 + x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^3}{3} = a^2x + \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow (x+y)^3 - 3a^2x - x^3 = C$$

उत्तर

अभ्यासमाला 4 (2)

TYPE-1 पर आधारित

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो।

1. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 05)
2. $(1 + x^2)\,dx + xy\,dy = 0$
3. $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$
4. $\log\frac{dy}{dx} = ax + by$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x - 1)}{\sin y - y\cos y}$
6. $\tan y\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \sin(x-y)$
7. $3e^x\cot y\,dx + (1 - e^x)\,\text{cosec}^2 y\,dy = 0$
8. $\sec^2 x\tan y\,dx - \sec^2 y\tan x\,dy = 0$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sin x - x}{y(2\log y - 1)}$
10. $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y\sin x\,dy = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)
11. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2\cdot e^{-y}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 2007)
12. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1993, 2008)
13. $y\sqrt{1-x^2}\,dy + x\sqrt{1-y^2}\,dx = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)
14. $(1 - e^x)(1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} + \frac{3e^x}{\cot y} = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)
15. $x\,dx + y\,dy = x^2y\,dy - xy^2dx$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{6e^{6x} + 6e^{4x}}{2e^x + 2e^{-x}}$
17. Solve $(1 + x)(1 - y)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

TYPE–II पर आधारित

18. $\frac{dy}{dx} = \cos^2(x - y)$
19. $\frac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$
20. $(x - y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1991)
21. $\left(\frac{x+y-1}{x+y-2}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2}$
22. $\frac{dy}{dx} = \sin(x - y) + \cos(x - y)$
23. $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$
24. $(x + y)^2\frac{dy}{dx} = 3(x + y) - 4$
25. $(2x + y + 1)\,dx + (4x + 2y - 1)\,dy = 0)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उत्तरमाला 4 (2)

1. $y - x = a(1 + xy)$
2. $xe^{(x^2+y^2)/2} = C$
3. $(x + a)(1 - ay) = Cy$
4. $be^{ax} + ae^{-by} = C$
5. $x^2 \log x - x^2 + 2\cos y + y \sin y = C$
6. $2\cos x + \sec y = C$
7. $(1 - e^x)^3 = C \tan y$
8. $\frac{x^2}{2} + x\cos x - \sin x + y^2 \log y - y^2 = C$
9. $\tan x = C \tan y$
10. $(1 + e^y) \sin x = C$
11. $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + C$
12. $\log (1 + y)^2 = 2x + x^2 + C$
13. $\sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - x^2} = C$
14. $\tan y = C(1 - e^x)^3$
15. $x^2 - 1 = C(1 + y^2)$
16. $5y = 3e^{5x} + C$
17. $\log \frac{y}{1+x} = y - x + \log C$
18. $x + \cot (x - y) = C$
19. $2y - 2x + \sin 2(x + y) = C$
20. $y = \frac{a}{2} \log \left(\frac{x - y - a}{x - y + a}\right) + C$
21. $2y - 2x + \log [(x + y)^2 - 2] = C$
22. $\log \left[1 - \cot \left(\frac{x - y}{2}\right)\right] = x + C$
23. $\tan (x + y) - \sec (x + y) = x + C$
24. $y - \frac{16}{5} \log (x + y + 4) + \frac{1}{5} \log (x + y - 1) = C$
25. $x + 2y + \log (1 - 2x - y) = C$

TYPE–III

9. समघात अवकल समीकरणें (Homogeneous Differential Equations) :

$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ रूप की समीकरणें, जिनके अंश तथा हर के प्रत्येक पद की घात बराबर होती है, समघात समीकरणें कहलाती हैं।

जैसे, $\frac{dy}{dx} = \frac{x(y+x)}{y(x-y)}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ ..... आदि।

ऐसी समीकरणों को हल करने के लिए, $y = vx$ मान लो। अवकलित करने पर, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ · अब y तथा $\frac{dy}{dx}$ के इन मानों को मूल समीकरण में रख दो। इससे समीकरण चरों के पृथक्करणीय रूप (variables separable) में आ जायेगी।

उदाहरण 17. समीकरण $(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$ को हल करो।

हल : $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ (समघात समीकरण)

माना कि $y = vx$, तब $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2x^2 - x^2}{2x.vx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$

$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v} = -\frac{(1 + v^2)}{2v}$

$\Rightarrow \quad \frac{2v\, dv}{1 + v^2} = -\frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2v\, dv}{1 + v^2} = -\int \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow \quad \log (1 + v^2) = -\log x + \log C = \log \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 + v^2 = \frac{C}{x}$

$\Rightarrow \quad 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = Cx$ उत्तर

उदाहरण 18. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 3x^2y}{x^3 + 3xy^2}$ को हल करो।

हल : माना कि $y = vx$, जिससे $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

ये मान समीकरण में रखने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3x^3 + 3x^2.vx}{x^3 + 3x.v^2x^2} = \frac{v^3 + 3v}{1 + 3v^2}$$

$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3 + 3v}{1 + 3v^2} - v = \frac{v^3 + 3v - v - 3v^3}{1 + 3v^2}$

$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{2v - 2v^3}{1 + 3v^2} = \frac{2v(1 - v^2)}{(1 + 3v^2)}$

$\Rightarrow \quad \frac{1 + 3v^2}{v(1 - v^2)} dv = \frac{2}{x} dx$

आंशिक भिन्नें बनाकर समाकलित करने पर,

$$\int \left(\frac{1}{v} + \frac{2}{1 - v} - \frac{2}{1 + v}\right) dv = 2\int \frac{1}{x} dx$$

$\Rightarrow \quad \log v - 2\log (1 - v) - 2\log (1 + v) = 2\log x + \log C$

$\Rightarrow \quad \log \left[\frac{v}{(1 - v)^2 (1 + v)^2}\right] = \log (Cx^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{(1 - v^2)^2} = Cx^2$

$\Rightarrow \quad \frac{y/x}{[1 - (y^2/x^2)]^2} = Cx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3y}{(x^2 - y^2)^2} = Cx^2$

$\Rightarrow \quad xy = C(x^2 - y^2)^2$ उत्तर

TYPE–IV

10. समघात में परिवर्तनशील समीकरणें (Reducible to Homogeneous) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$$

प्रारूप की समीकरण में $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखकर समीकरण को समघात में परिवर्तित किया जाता है। तब समघात समीकरणों को हल करने की विधि से समीकरण हल हो जाती है जैसा कि आगे उदाहरण में स्पष्ट किया गया है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 19. समी० $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y-1}{y-2x+2}$ को हल करो।

हल : $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखने पर, $dx = dX$ तथा $dy = dY$

$$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dX}=\frac{X+h-2(Y+k)-1}{Y+k-2(X+h)+2}=\frac{X-2Y+(h-2k-1)}{-2X+Y+(k-2h+2)}$$

समघात होने के लिए, $h-2k-1=0$ तथा $-2h+k+2=0$. इन्हें हल करने पर, $h=1$ तथा $k=0$

तब $\frac{dY}{dX}=\frac{X-2Y}{-2X+Y}$, जो कि समघात है। इसमें $Y=vX$, $\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$ रखने पर,

$$\therefore \quad v+X\frac{dv}{dX}=\frac{X-2vX}{-2X+vX}=\frac{1-2v}{-2+v}$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dv}{dX}=\frac{1-2v}{-2+v}-v=\frac{1-2v+2v-v^2}{v-2}$$

$$\Rightarrow \quad X\frac{dv}{dX}=\frac{1-v^2}{v-2} \Rightarrow \int\frac{v-2}{1-v^2}dv=\int\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{v}{1-v^2}dv-2\int\frac{1}{1-v^2}dv=\int\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\log(1-v^2)-2\times\frac{1}{2\times1}\log\frac{1+v}{1-v}=\log X+\log C$$

$$\Rightarrow \quad -\left[\log\sqrt{(1-v^2)}+\log\frac{1+v}{1-v}\right]=\log CX$$

$$\Rightarrow \quad \log\left[\frac{\sqrt{[1-v^2]}\,(1+v)}{1-v}\right]=-\log CX=\log\frac{1}{CX}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+v)^{3/2}}{(1-v)^{1/2}}=\frac{1}{CX} \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{Y}{X}\right)^{3/2}}{\left(1-\frac{Y}{X}\right)^{1/2}}=\frac{1}{CX} \Rightarrow \frac{(X+Y)^{3/2}}{X(X-Y)^{1/2}}=\frac{1}{CX}$$

X तथा Y के मान ($X=x-1$ तथा $Y=y-0$) रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1+y)^{3/2}}{(x-1)(x-1-y)^{1/2}}=\frac{1}{C(x-1)}$$

$$\Rightarrow \quad (x+y-1)^{3/2}=C'(x-y-1)^{1/2}$$ उत्तर

नोट : $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{m(ax+by)+c}$ रूप की समीकरणें उपरोक्त विधि से हल नहीं की जा सकती क्योंकि $ax+by+c=0$ तथा $m(ax+by)+c=0$ समान्तर रेखाओं के समीकरण हैं। ऐसी समीकरणों में $ax+by=z$ मान लेने से समीकरणें variables separable के रूप में परिवर्तित हो जाती हैं।

उदाहरण 20. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y+3}{x+y+1}$ को हल करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1995)

हल : माना कि $x+y=z$ तब $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx}-1=\frac{2z+3}{z+1} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{2z+3}{z+1}+1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=\frac{2z+3+z+1}{z+1}=\frac{3z+4}{z+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z+1}{3z+4}dz=dx$$

$$\Rightarrow \quad \int\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3z+4)}\right)dz=\int 1.dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}z-\frac{1}{3}\times\frac{\log(3z+4)}{3}=x+C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}(x+y)-\frac{1}{9}\log(3x+3y+4)=x+C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}y-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}\log(3x+3y+4)=C$$

$$\Rightarrow \quad 3y-6x-\log(3x+3y+4)=C'$$

अभ्यासमाला 4 (3)

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो—

1. $(x^2+y^2)\,dx=2xy\,dy$
2. $x(x-y)\frac{dy}{dx}=y(x+y)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 20
3. $x\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=y$
4. (i) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^3-2x^2y}{x^3}$

4. (ii) $x(x-y)\frac{dy}{dx}+y^2=0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\log\frac{y}{x}+1\right)$
6. $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy=\left[y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\right]dx$
7. $y\cos\frac{y}{x}(x\,dy-y\,dx)+x\sin\frac{y}{x}(x\,dy+y\,dx)=0$
8. $(1+e^{x/y})\,dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$
9. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\phi(y/x)}{\phi'(y/x)}$
10. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$
11. $x^2dy+y(x+y)\,dx=0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1991,
12. $\frac{dy}{dx}=\frac{3xy+y^2}{3x^2}$
13. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$
14. $(x\,dx+y\,dy)=m(x\,dy-y\,dx)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 19
15. $\frac{dy}{dx}+\frac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2}=0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 19
16. $(x^3+3xy^2)\,dx+(3x^2y+y^3)\,dy=0$ (उ० प्र० डिप्लोमा
17. $(x^2+2xy)\frac{dy}{dx}+2xy+y^2+3x^2=0$ (उ० प्र० डिप्लोमा

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

निम्नलिखित समीकरणों का हल करो—

18. $(x-y)\,dy = (x+y+1)\,dx$

19. $(x+y)(dx-dy) = dx+dy$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x+6y+5}{3y+2x+4}$

21. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+y+3}{2y+x+3}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y-3}{2+y-3}$

23. उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका ढाल $\dfrac{1+y}{x^2-x}$ है तथा बिन्दु $(2, 1)$ से होकर जाता है।

24. समीकरण $x^3dy + xy\,dx = x^2dy + 2y\,dx$ को हल करो, दिया है $y = e$ जब $x = 2$

उत्तरमाला 4 (3)

1. $c(x^2-y^2) = x$	2. $\dfrac{x}{y} + \log\dfrac{y}{x} = \log\dfrac{1}{c^2x^2}$
3. $x = y\log x + cy$	4. (i) $y^2 - 3x^2 = cy^2x^6$ (ii) $y - x\log y = cx$
5. $y = xe^{cx}$	6. $ce^{\cos(y/x)}$
7. $xy\sin(y/x) = c$	8. $x + ye^{x/y} = c$
9. $\varphi(y/x) = cx$	10. $y + \sqrt{(x^2+y^2)} = cx^2$
11. $yx^2 = c(y+2x)$	12. $3x + y\log x + cy = 0$
13. $\sin(y/x) = cx$	14. $e^{m\tan^{-1}(y/x)} = c\sqrt{x^2+y^2}$
15. $\log(x+y) + \dfrac{2xy}{(x+y)^2} = c$	16. $\sqrt[4]{y^4+6x^2y^2+x^5} = cx$
17. $x(x^2+xy+y^2) = c$	18. $\tan^{-1}\left[\dfrac{2y+1}{2x+1}\right] - \dfrac{1}{2}\log\left(x^2+y^2+x+y+\dfrac{1}{2}\right) = c$
19. $\log(x+y) = x-y+c$	20. $y - 2x + \dfrac{3}{8}\log(16x+24y+23) = c$
21. $(x+y+2)(x-y)^3 = c$	22. $x+y-2 = C(x-y)^3$
23. $xy - 3x + 4 = 0$	24. $\log\dfrac{xy}{2(x-1)} = \dfrac{2}{x}$

TYPE–V

11. रैखिक अवकल समीकरणें (Linear Differential Equations) :

1. y तथा (dy/dx) में रैखिक समीकरणें [Linear in y and (dy/dx)]

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad ...(1)$$

रूप की समीकरणें, जहां P तथा Q, स्थिर राशियाँ अथवा x के फलन हैं, y तथा (dy/dx) में रैखिक समीकरणें कहलाती हैं। आश्रित चर y तथा इसका अवकल गुणांक (dy/dx) केवल प्रथम घात में होते हैं। इन्हें हल करने के लिए, समी० (1) के दोनों पक्षों को $e^{\int P dx}$ से गुणा करो।

तब,
$$\frac{dy}{dx}e^{\int P dx} + Pe^{\int P dx}y = Qe^{\int P dx} \qquad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right) = Qe^{\int P dx}$$

x के आपेक्ष समाकलन करने पर,

$$y \times e^{\int P dx} = \int Q \times e^{\int P dx}dx + C$$

$$\Rightarrow \quad y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\,dx + C$$

जोकि समीकरण का अभीष्ट हल है।

I.F. $= e^{\int P dx}$, समाकल गुणनखण्ड (Integrating Factor) कहलाता है।

2. x तथा (dx/dy) में रैखिक समीकरणें [Linear in x and dx/dy]

$$\frac{dx}{dy} + Px = Q$$

रूप की समीकरणें, जहाँ P तथा Q स्थिर राशियाँ अथवा y के फलन हैं, x तथा (dx/dy) में रैखिक समीकरणें कहलाती है। x तथा (dx/dy) केवल प्रथम घात के होते हैं। ऐसी समीकरणों का हल,

$$x \times e^{\int P dy} = \int Q \times e^{\int P dy}dy + C \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\Rightarrow \quad x \times (\text{I.F.}) = \int Q \times (\text{I.F.})\,dy + C$$

यहाँ समाकल गुणनखण्ड (I.F.) $= e^{\int P dy}$ है।

रैखिक अवकल समीकरणों को लैबनीज़ रैखिक समीकरणें भी कहते हैं।

उदाहरण 21. समी० $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^4$ को हल करो।

हल :
$$(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^4$$

$(x+1)$ से भाग करने पर,
$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

जोकि $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ रूप की है, जहां $P = \dfrac{-2}{x+1}$ तथा $Q = (x+1)^3$

$$I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{-2}{x+1}dx} = e^{-2\log(x+1)} = e^{\log(x+1)^{-2}} = (x+1)^{-2}$$

समीकरण का हल,
$$y \times (I.F.) = \int Q \times (I.F.)\,dx + C \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\Rightarrow \quad y \times \frac{1}{(x+1)^2} = \int (x+1)^3 \times \frac{1}{(x+1)^2}dx + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{(x+1)^2} = \int (x+1)\,dx + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{2} + x + C$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 22. समीकरण $ye^y dx = (y^3 + 2xe^y)\,dy$ को हल करो।

हल:

$$ye^y dx = (y^3 + 2xe^y)\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y^3 + 2xe^y}{ye^y} = \frac{y^2}{e^y} + \frac{2x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}\cdot x = y^2 e^{-y}$$

जोकि $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ रूप की है, जहाँ $P = -\frac{2}{y}$ तथा $Q = y^2 e^{-y}$

$$I.F. = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2\log y} = e^{\log \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$$

समीकरण का हल, $\quad x \times (I.F.) = \int Q \times (I.F.)\,dy + C$ (सूत्र)

$$x \times \frac{1}{y^2} = \int y^2 \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{y^2} dy + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y^2} = \int e^{-y} dy + C = -e^{-y} + C$$

$$x = -y^2 e^{-y} + Cy^2$$ उत्तर

TYPE–VI

12. रैखिक रूप में परिवर्तनशील समीकरणें (Reducible to Linear Form) :

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \quad ...(1)$$

रूप की समीकरणों को y^n से विभाजित करने के पश्चात् $\frac{1}{y^{n-1}}$ को z मान लेने से समीकरण रैखिक रूप में परिवर्तित हो जाती हैं। क्रिया विधि अगले उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगी।

इस प्रकार की रैखिक अवकल समीकरणों को बरनौली अवकल समीकरणें कहते हैं।

सारांश (Summary) : **याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)**

(i) यदि रैखिक अवकल समी०, $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ रूप की है तो समी० का हल, $y \times I.F. = \int Q.I.F.\,dx$ से प्राप्त होगा, जहाँ $I.F. = e^{\int P dx}$

(ii) यदि रैखिक अवकल समी०, $\frac{dy}{dx} + Px = Q$ रूप की है तो समी० का हल $x \times I.F. = \int Q.I.F.\,dy$ से प्राप्त होगा, जहाँ $I.F. = e^{\int P dy}$

(iii) यदि रैखिक अवकल समी०, $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ रूप की है तो पहले पूरी समीकरण को y^n से विभाजित करो। फिर $\frac{1}{y^{n-1}} = z$ मानकर, $\frac{dy}{dx}$ को $\frac{dz}{dx}$ में परिवर्तित करो, फिर $z \times I.F. = \int Q.I.F.\,dx$ से हल प्राप्त करो।

उदाहरण 23. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = y^2 \sec x$ को हल करो।

हल: y^2 से भाग करने पर, $y^{-2}\frac{dy}{dx} + \tan x \times \frac{1}{y} = \sec x,$

माना कि $\frac{1}{y} = z$ तब, $-y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{dz}{dx} + \tan x \times z = \sec x \quad \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \tan x \times z = -\sec x$$

जो कि $\frac{dz}{dx} + P \times z = Q$ रूप का रैखिक समीकरण है, जहाँ $P = -\tan x$ तथा $Q = -\sec x$ है।

$$\therefore \quad I.F. = e^{\int P dx} = e^{-\int \tan x dx} = e^{-\log \sec x} = e^{\log \cos x} = \cos x$$

समीकरण का हल $\quad z \times (I.F.) = \int Q \cdot (I.F.)\,dx + C$ (सूत्र)

$$z\cos x = \int -\sec x \cos x\,dx + C$$

$$\frac{1}{y} \times \cos x = \int -1 \cdot dx + C = -x + C$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = -xy + Cy$$ उत्तर

उदाहरण 24. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$ को हल करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)

हल : $\quad \frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x \Rightarrow \frac{1}{y^n} \times \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}}\cos x = \sin 2x \quad ...(1)$

माना कि $\quad \frac{1}{y^{n-1}} = z$ अर्थात् $y^{1-n} = z,$

तब $\quad (1-n)\cdot y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \times \frac{dz}{dx}$

समी० (1) में यह मान रखने पर,

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + z \times \cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} + (1-n) \times \cos x \times z = (1-n)\sin 2x \quad ...(2)$$

जोकि $\frac{dy}{dx} + P \cdot y = Q$ के रूप की है।

यहाँ पर, $\quad P = (1-n)\cos x, \quad Q = (1-n)\sin 2x$

$$I.F. = e^{\int P dx} = e^{(1-n)\int \cos x dx} = e^{(1-n)\sin x}$$

समी० (2) का हल, $\quad z \times I.F. = \int Q.I.F.\,dx + C$

$$z \times e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n)\sin 2x \cdot e^{(1-n)\sin x} dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} \cdot e^{(1-n)\sin x} = (1-n)\int 2\sin x \cos x\, e^{(1-n)\sin x} dx \quad ...(3)$$

समी० (3) के दायें पक्ष में $\sin x = t$ रखने पर, $\cos x\,dx = dt$

$$I = 2(1-n)\int t \cdot e^{(1-n)t} dt$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$= 2(1-n)\left[t \times \frac{e^{(1-n)t}}{(1-n)} - \int 1 \cdot \frac{e^{(1-n)t}}{(1-n)}\,dt\right]$$

$$= 2(1-n)\left[\frac{t \cdot e^{(1-n)t}}{(1-n)} - \frac{1}{1-n}\cdot\frac{e^{(1-n)t}}{(1-n)}\right]$$

$$= 2te^{(1-n)t} - \frac{2}{1-n}e^{(1-n)t} = 2\sin x\, e^{(1-n)\sin x} - \frac{2}{1-n}e^{(1-n)\sin x}$$

समी० (3) से, $$\frac{e^{(1-n)\sin x}}{y^{n-1}} = 2\sin x\, e^{(1-n)\sin x} - \frac{2}{1-n}e^{(1-n)\sin x} + C$$ उत्तर

अभ्यासमाला 4 (4)

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो—

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 - 3$
2. $\frac{dy}{dx} + 2y\cot x = 3x^2 \operatorname{cosec}^2 x$
3. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
4. $x^2\frac{dy}{dx} + xy = 4$
5. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cos^2 x$
6. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 2x \times \sqrt{1-x^2}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1991)
7. $x\log x\frac{dy}{dx} + y = \log x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1992)
8. $(x+2y^3)\frac{dy}{dx} = y$
9. $y\frac{dx}{dy} + 2x = y^2 + 1$
10. $(x+y+1)\frac{dy}{dx} = 1$
11. $(1+y^2)\frac{dx}{dy} + x = e^{-\tan^{-1}y}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)
12. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2y^2$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)
13. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)
14. $\frac{dx}{dy} = x^3y - x$
15. $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^3 + 3y}{3x - 2xy^2}$
17. $x(x-1)\frac{dy}{dx} - y = x^3(x-1)^2$
18. $(x^3y^2 + xy)\,dx = dy$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1995)
19. $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1994)
20. $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 10)

21. $\sec^2 y\frac{dy}{dx} + x\tan y = x^3$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)
22. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$
23. $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)\,dy$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

संकेत : $(x^2+y^2)\,dx + y\,dx - x\,dy = 0 \Rightarrow dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$

Integrating, $x + \tan^{-1}\frac{x}{y} = C$ उत्तर

24. $y\,dx - x\,dy + 3x^2y^2e^{x^3}\,dx = 0$

संकेत : $\int \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + \int 3x^2e^{x^3}\,dx = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + e^{x^3} = C$ उत्तर

25. $(x^2+y^2-x)\,dx = (x^2+y^2-y)\,dy$

संकेत : $(x^2+y^2)(dx - dy) = x\,dx + y\,dy$

$\Rightarrow \quad dx - dy = \frac{x\,dx - y\,dy}{x^2+y^2} \Rightarrow \int dx - \int dy = \int \frac{x\,dx - y\,dy}{x^2+y^2}$

$x - y = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C$ उत्तर

26. यदि $y = a\cos px + b\sin px$, तब सिद्ध करो कि $\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)
27. यदि $y = e^{ax}\sin bx$, तब सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2+b^2) = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

उत्तरमाला 4 (4)

1. $xy = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + C$
2. $y\sin^2 x = x^3 + C$
3. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$
4. $xy = 4\log x + C$
5. $y\sec x = \sin x + C$
6. $y\sqrt{1-x^2} - x^2 = C$
7. $y\log x = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$
8. $x = y^3 + Cy$
9. $xy^2 = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + C$
10. $x + y + 2 = Ce^y$
11. $xe^{\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1) + C$
12. $\frac{x}{y} + \frac{x^4}{4} = C$
13. $y^{1-n} = 2\sin x - \frac{2}{1-n} + Ce^{(n-1)\sin x}$
14. $\frac{1}{x^2} = y + \frac{1}{2} + Ce^{2y}$
15. $y = \tan x - 1 + Ce^{-\tan x}$
16. $\frac{y}{2y^2+3} = Cx$
17. $\frac{xy}{x-1} = \frac{x^4}{4} + C$
18. $e^{x^2/2}\left(\frac{1}{y} + x^2 - 2\right) = C$
19. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$
20. $y = \cos x + C\cos^2 x$
21. $e^{x^2/2}\tan y = e^{x^2/2}(x^2 - 2) + C$
22. $x + \tan^{-1}\frac{x}{y} = C$
23. $x = \tan^{-1}y - 1 + Ce^{-\tan^{-1}y}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

TYPE–VII

13. यथार्थ (पूर्ण) अवकल समीकरणें (Exact Differential Equations) :

समी० $xy = C$ को अवकलित करने पर, $x\,dy + y\,dx = 0$

समी० $\frac{y}{x} = C$ को अवकलित करने पर, $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$

समी० $\sin x \cos y = C$ को अवकलित करने पर, $\cos x \cos y\,dx - \sin x \sin y\,dy = 0$

हम देखते हैं कि ऊपर प्राप्त तीनों अवकल समीकरणें, $f(x, y) = C$ प्रकार की समीकरणों को बिना कोई और क्रिया किये हुये सीधे अवकलित करने पर प्राप्त हुई हैं। ऐसी समीकरणें यथार्थ अथवा पूर्ण अवकल समीकरणें कहलाती हैं। अतः

"यथार्थ अवकल समीकरण वह है जो $f(x, y) = C$ को सीधे अवकलित कर प्राप्त की गई हो।"

14. किसी अवकल समीकरण के यथार्थ (Exact) होने का प्रतिबन्ध :

अवकल समी० $Mdx + Ndy = 0$, जहाँ M तथा N, x तथा y के फलन हैं, यथार्थ अवकल समीकरण होगी यदि $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\frac{\partial M}{\partial y}$, x को स्थिर मानकर M का y के सापेक्ष आंशिक अवकल गुणांक है।

$\frac{\partial N}{\partial x}$, y को स्थिर मानकर N का x के सापेक्ष आंशिक अवकल गुणांक है।

15. यथार्थ समीकरणों को हल करने की विधि :

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

(i) y को स्थिर मानकर M का x के सापेक्ष समाकलन करो।
(ii) N के केवल उन पदों का, जिनमें x नहीं है, y के सापेक्ष समाकलन करो।
(iii) प्राप्त दोनों समाकलों के योग को स्थिरांक C के बराबर रख दो।

उदाहरण 25. समी० $(y \cos xy + 2x)\,dx + x \cos xy\,dy = 0$ को हल करो।

हल : दी हुई समी० $Mdx + Ndy = 0$ रूप की है।

$\because \quad M = y \cos xy + 2x$ तथा $N = x \cos xy$

$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \cdot \cos xy + y(-\sin xy) \cdot x + 0 = \cos xy - xy \sin xy$

$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \cdot \cos xy + x \cdot (-\sin xy) \cdot y = \cos xy - xy \sin xy$

$\because \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ अतः दी हुई समीकरण यथार्थ (exact) समीकरण है।

अब, $\int M\,dx = \int (y \cos xy + 2x)\,dy = y \times \frac{\sin xy}{y} + \frac{2x^2}{2} = \sin xy + x^2$

$\int N\,dy = 0$ ($\because N$ में ऐसा कोई पद नहीं है जिसमें x न हो)

अभीष्ट हल, $\int M\,dx + \int N\,dy = C$

$\Rightarrow \quad \sin xy + x^2 = C$

उदाहरण 26. समी० $(\sec x \tan x \tan y - e^x)\,dx + \sec x \sec^2 y\,dy = 0$ को हल करो।

हल : $\because \quad M = \sec x \tan x \tan y - e^x$

$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \sec x \tan x \sec^2 y - 0$ ($\because x$ स्थिर है।) ...(1)

$\because \quad N = \sec x \sec^2 y$

$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \sec x \tan x \sec^2 y$ ($\because y$ स्थिर है) ...(2)

समी० (1) तथा (2) से, $\because \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\therefore$ दी हुई समी० यथार्थ समीकरण है।

अब, $\int M\,dx = \int (\sec x \tan x \tan y - e^x)\,dx = \sec x \tan y - e^x$ ($\because y$ स्थिर है)

$\int N\,dy = 0$ ($\because N$ में x रहित कोई पद नहीं है)

अभीष्ट हल, $\int M\,dx + \int N\,dy = C \Rightarrow \sec x \tan y - e^x = C$

अभ्यासमाला 4 (5)

निम्न अवकल समीकरणों को हल करो—

1. $(2x - y - 1)\,dy - (x - 2y + 5)\,dx = 0$
2. $(x + 2y - 3)\,dy - (2x - y + 1)\,dx = 0$
3. $(x^2 - ay)\,dx - (ax - y^2)\,dy = 0$
4. $(2xy + 2y^2 e^{2x})\,dx + (x^2 + 2ye^{2x})\,dy = 0$
5. $(ye^{xy} - \tan x)\,dx + (xe^{xy} - \sec y)\,dy = 0$
6. $(a^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x + y)^2\,dy = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)
7. $(x - 2\sin y + 3)\,dx - (2x - 4\sin y - 3)\cos y\,dy = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1994)
8. $(x^3 + 3xy^2)\,dx - (3x^2 y + y^3)\,dy = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)
9. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2 y + 4y^3)\,dy = 0$
10. $\frac{dx}{dy} = \frac{hx + by + f}{ax + hy + g}$
11. $x\,dx + y\,dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

संकेत : यथार्थ समी० विधि से हल करो या $\int x\,dx + \int y\,dy = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \tan^{-1}\frac{y}{x} + C$

उत्तरमाला 4 (5)

1. $x^2 - 4xy - y^2 + 10x + 2y = C$
2. $y^2 - 3y - x^2 + xy - x = C$
3. $x^3 + y^3 - 3axy = C$
4. $x^2 y + y^2 e^{2x} = C$
5. $e^{xy} - \log \sec x - \log(\sec y + \tan y) = C$
6. $a^2 x - \frac{1}{2}x^2 y - xy^2 - \frac{1}{2}y^3 = C$
7. $\frac{x^2}{2} - 2x \sin y + 3x - \cos 2y + 3\sin y = C$
8. $x^4 + 6x^2 y^2 + y^4 = C$
9. $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = C$
10. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
11. $x^2 + y^2 - 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = C$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

5 उच्च क्रम के रैखिक अवकल समीकरण

(Linear Differential Equations of Higher Order)

1. परिचय (Introduction) :

ऐसी अवकल समीकरण जिन में सभी अवकलज (derivatives) एक घात के हैं तो वह रैखिक अवकल समीकरणें (linear differential equation) कहलाती हैं और यदि अवकलजों के गुणांक अचर राशियाँ हैं तब वे अचर गुणांकों वाली रैखिक समीकरणें (linear differential equation with constant coefficients) कहलाती हैं।

इस अध्याय में हम इसी प्रकार की अवकल समीकरणों को हल करना सीखेंगे।

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = X \quad ...(1)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = X \quad ...(2)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_ny = X \quad ...(3)$$

जहां $P, Q, R, a_1, a_2, ..., a_n$ अचर राशियाँ हैं तथा X एक अचर राशि अथवा x का फलन है। सभी अवकलज एक घात के हैं।

समीकरण (1) द्वितीय क्रम की, समीकरण (2) तृतीय क्रम की तथा समीकरण (3) n वें क्रम की रैखिक अवकल समीकरण है।

यदि $X = 0$, तब समीकरण समघात (homogeneous) रैखिक अवकल समीकरण कहलाती है।

2. अवकल संकारक D (Differential Operator D) :

$\frac{d}{dx}$ के स्थान पर अवकल संकारक (differential operator) D का प्रयोग करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = Dy, \ \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y, \ \frac{d^3y}{dx^3} = D^3y, \ \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

इनका प्रयोग करने पर, अवकल समीकरण

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_ny = X$$

का रूप $\quad D^ny + a_1D^{n-1}y + a_2D^{n-2}y + ... + a_ny = X$

अर्थात् $\quad (D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + ... + a_n)y = X$

$$\Rightarrow \quad f(D)y = X$$

जहां $f(D) = D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + ... + a_n$ अवकल संकारक D का बहुपदीय फलन (polynomial) है।

3. उच्च कोटि की रैखिक समीकरणों का हल :
(Solution of Linear Differential Equations of Higher Order)

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_ny = X \quad ...(1)$$

इस समीकरण के हल के दो भाग हैं—

1. पूरक फलन (Complementary Function i.e. C.F.)
2. विशेष समाकल (Particular Integral i.e. P.I.)

दोनों का योग समीकरण (1) का सम्पूर्ण हल (Complete solution) है जिसे व्यापक हल (general solution) भी कहते हैं।

इस प्रकार अचर गुणांकों वाले उच्च घातीय रैखिक समीकरण का

सम्पूर्ण हल = पूरक फलन + विशेष समाकल

$$\Rightarrow \quad y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

यदि $X = 0$, तब P.I. = 0 होता है। ऐसी स्थिति में y = C.F. ही समीकरण का सम्पूर्ण हल होता है।

4. पूरक फलन (Complementary Function) ज्ञात करने की विधि :

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_ny = X \quad ...(1)$$

पहले हम X को शून्य ($X = 0$) मानकर केवल पूरक फलन (C.F.) ज्ञात करना सीखेंगे।

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_ny = 0 \quad ...(2)$$

माना कि $y = ce^{mx}$ इसका हल है। तब समीकरण (2) में

$$\frac{d^ny}{dx^n} = ce^{mx}\cdot m^n, \ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = ce^{mx}\cdot m^{n-1}, \ \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = ce^{mx}\cdot m^{n-2}, ...$$

$$ce^{mx}(m^n + a_1\cdot m^{n-1} + a_2\cdot m^{n-2} + ... + a_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + ... + a_n = 0 \quad ...(3)$$

समीकरण (3) को सहायक समीकरण (auxiliary equation) कहते हैं जो कि n घात का बीजगणितीय (Algebraic) समीकरण है अतः इसके n मूल होंगे और समीकरण के हल (solution) में n ही स्वेच्छ अचर (arbitrary constants) होंगे।

5. समघात (Homogeneous) अवकल समीकरण का हल ज्ञात करना :

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^n} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_ny = 0$$

n कोटि की समघात अवकल समीकरण है। इसकी सहायक समीकरण (auxiliary equation)

$$m^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + ... + a_n = 0 \text{ है।}$$

माना कि सहायक समीकरण के मूल $m_1, m_2, m_3, ...$ हैं। तब समीकरण का हल,

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + c_3e^{m_3x} + ... \text{ है।}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

जो कि समीकरण का पूरक फलन (C.F.) है और चूँकि $X = 0$ होने के कारण P. I.= 0 है अत: यही सम्पूर्ण हल (complete solution) है। लेकिन यह सम्पूर्ण हल सहायक समीकरण के मूलों की प्रकृति पर निर्भर करता है जिसका वर्णन आगे विभिन्न स्थितियों में किया गया है।

प्रथम स्थिति (Case I)

यदि सहायक समीकरण के सभी मूल वास्तविक तथा भिन्न हैं (Roots are real and different) :

माना कि मूल $m_1, m_2, m_3, ...$ हैं, तब

पूरक फलन (C.F.) $= c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + ..., P.I. = 0$

∴ सम्पूर्ण हल, $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + ...$ उत्तर

उदाहरणत: यदि मूल 2, 3, 6 हैं तब समीकरण का हल,

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{6x}$$

द्वितीय स्थिति (Case II)

यदि सहायक समीकरण के मूल वास्तविक तथा समान (equal) हैं (Roots are real and equal) :

माना कि मूल $m_1 = m_2, m_3 = m_4, \quad m_5, m_6, ...$ हैं, तब

सम्पूर्ण हल, $y = (c_1 + c_2 x) e^{m_1 x} + (c_3 + c_4 x) e^{m_3 x} + c_5 e^{m_5 x} + c_6 e^{m_6 x} + ...$

उदाहरणत: यदि मूल 1, 1, – 2, – 2, 3, 4 हैं तब समीकरण का हल

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x} + c_5 e^{3x} + c_6 e^{4x}$$ उत्तर

यदि मूल 4, 4, 4, 2, – 1 हैं तब हल, $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{4x} + c_4 e^{2x} + c_5 e^{-x}$ उत्तर

तृतीय स्थिति (Case III)

यदि सहायक समीकरण के मूल सम्मिश्र संख्यायें हैं (Roots are Complex numbers) :

माना कि मूल $\alpha \pm i\beta$ हैं, तब

$$C.F. = c_1 . e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 . e^{(\alpha - i\beta)x}$$
$$= e^{\alpha x} [c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}]$$
$$= e^{\alpha x} [c_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)]$$
$$= e^{\alpha x} [(c_1 + c_2) \cos \beta x + (c_1 - c_2) . i \sin \beta x]$$

⇒ $y = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$ जहाँ $c_1 + c_2 = A, i \ (c_1 - c_2) = B$

उदाहरणत: यदि मूल $3 \pm 4i, 2, -1$ हैं तब समीकरण का हल

$$y = e^{3x} (A \cos 4x + B \sin 4x) + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-x}$$ उत्तर

(ii) यदि मूल $2 \pm 3i, 2 \pm 3i, 5, 4$ हैं तब समीकरण का हल

$$y = e^{2x} [(c_1 + c_2 x) \cos 3x + (c_3 + c_4 x) \sin 3x] + c_5 e^{5x} + c_6 e^{4x}$$ उत्तर

यदि अधिकल्पित मूल $m = \alpha \pm i\beta$ दो बार पुनरावृत्त (repeated) हैं तब

सम्पूर्ण हल, $y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x) \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) \sin \beta x]$

यदि अधिकल्पित मूल तीन बार पुनरावृत्त (repeated) है तब

सम्पूर्ण हल, $y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos \beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \beta x]$

चतुर्थ स्थिति (Case IV)

यदि सहायक समीकरण के मूल अपरिमेय हैं (Roots are irrational) :

माना कि मूल $m_1, \quad \alpha \pm \sqrt{\beta}$ हैं, तब

$$C.F. = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{(\alpha + \sqrt{\beta})x} + c_3 e^{(\alpha - \sqrt{\beta})x}$$
$$= c_1 e^{m_1 x} + e^{\alpha x} (c_2 e^{\sqrt{\beta} x} + c_3 e^{-\sqrt{\beta} x})$$

लेकिन $e^{\sqrt{\beta} x} = \cosh \sqrt{\beta} x + \sinh \sqrt{\beta} x$ तथा $e^{-\sqrt{\beta} x} = \cosh \sqrt{\beta} x - \sinh \sqrt{\beta} x$

∴ $C.F. = c_1 e^{m_1 x} + e^{\alpha x} [c_2 (\cosh \sqrt{\beta} x + \sinh \sqrt{\beta} x) + c_3 (\cosh \sqrt{\beta} x - \sinh \sqrt{\beta} x)]$

$$= c_1 e^{m_1 x} + e^{\alpha x} [(c_2 + c_3) \cosh \sqrt{\beta} x + (c_2 - c_3) \sinh \sqrt{\beta} x]$$

⇒ $y = c_1 e^{m_1 x} + e^{\alpha x} [A \cosh \sqrt{\beta} x + B \sinh \sqrt{\beta} x]$

उदाहरणत: यदि मूल $1, 3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$ हैं तब

$$y = c_1 e^{x} + e^{3x} [A \cosh \sqrt{2} x + B \sinh \sqrt{2} x]$$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$ को हल करो।

हल : दी हुई समीकरण की सहायक समीकरण (A. E.) निम्न है—

$$m^2 - 7m + 12 = 0 \quad ...(1)$$

⇒ $(m - 3)(m - 4) = 0$

⇒ $m = 3, m = 4$ समी० (1) के मूल हैं।

∴ दी हुई अवकल समी० का हल, $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ से

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$ उत्तर

उदाहरण 2. समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} - 12y = 0$ को हल करो।

हल : दी हुई समीकरण की सहायक समीकरण (A. E.) निम्न है

$$m^3 + 5m^2 - 8m - 12 = 0$$

यह त्रिघातीय समीकरण है, शेषफल प्रमेय से हल करने पर

$$(m - 2)(m^2 + 7m + 6) = 0$$

⇒ $(m - 2)(m + 1)(m + 6) = 0$

⇒ $m = 2, -1, -6$ इसके मूल हैं।

∴ दी हुई समीकरण का व्यापक हल $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-6}$

उदाहरण 3. समी० $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 15\frac{dy}{dx} + 36 = 0$ को हल करो।

हल : सहायक समी० $m^3 - 2m^2 - 15m + 36 = 0$

⇒ $(m - 3)(m^2 + m - 12) = 0$

⇒ $(m - 3)(m + 4)(m - 3) = 0$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow$ $m = 3, 3, -4$ इसके मूल हैं।

$\because$ दो मूल समान हैं $\therefore$ दी हुई समीकरण का व्यापक हल,

$$y = (c_1 + c_2x)\, e^{m_1 x} + c_3 e^{m_2 x}$$

$$\Rightarrow \quad y = (c_1 + c_2)\, e^{3x} + c_3 e^{-4x}$$

उदाहरण 4. समी० $\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0$ को हल करो।

हल : सहायक समी० $\quad m^4 - 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0$

शेषफल प्रमेय से हल करने पर, $\quad (m + 1)(m^3 - 6m^2 + 12m - 8) = 0$

$$\Rightarrow \quad (m + 1)(m - 2)(m^2 - 4m + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m + 1)(m - 2)(m - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m + 1)(m - 2)^3 = 0$$

इसके मूल, $m = -1, 2, 2, 2$ हैं।

$\because$ तीन मूल समान हैं $\quad \therefore$ समी० का व्यापक हल,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)\, e^{m_2 x} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 + c_4x^2)\, e^{2x} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 5. समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 21\frac{dy}{dx} - 26 = 0$ को हल करो।

हल : सहायक समी० $\quad m^3 - 6m^2 + 21m - 26 = 0$

$$\Rightarrow \quad (m - 2)(m^2 - 4m + 13) = 0$$

$\Rightarrow$ $m = 2$ तथा $m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$ $\Rightarrow$ सहायक समी० के मूल $2, 2 \pm 3i$ हैं।

$\because$ इस प्रकार की समीकरण का हल, $\quad y = c_1 e^{m_1 x} + e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (सूत्र)

$\therefore$ दी हुई समीकरण का व्यापक हल, $\quad y = c_1 e^{2x} + e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$ उत्तर

उदाहरण 6. समीकरण $(D^2 + D + 1)^2 y = 0$ को हल करो।

हल : सहायक समी०, $\quad (m^2 + m + 1)^2 = 0 \Rightarrow (m^2 + m + 1) = 0$

$m^2 + m + 1 = 0$ से, $\qquad m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

अत: सहायक समी० के मूल $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$ है।

$\because$ इस प्रकार की समीकरणों का व्यापक हल,

$$y = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2x)\cos\beta x + (c_3 + c_4x)\sin\beta x\right] \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[(c_1 + c_2x)\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + (c_3 + c_4x)\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right] \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 7. समी० $\frac{d^4y}{dx^4} + 16y = 0$ को हल करो।

हल : सहायक समी०, $\quad m^4 + 16 = 0$

$$\Rightarrow \quad m^4 + 8m^2 + 16 - 8m^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2 + 4)^2 - (2\sqrt{2}\,m)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m^2 - 2\sqrt{2}m + 4)(m^2 + 2\sqrt{2}m + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 16}}{2}, \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 16}}{2} = \sqrt{2} \pm i, -\sqrt{2} \pm i$$

व्यापक हल,

$$y = e^{\sqrt{2}x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-\sqrt{2}x}(c_3\cos x + c_4\sin x) \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 8. समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

हल : सहायक समी० $\quad m^3 - 6m^2 + 9m - 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad (m - 2)(m^2 - 4m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = 2, \qquad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

व्यापक हल,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + e^{\alpha x}[A\cosh\sqrt{\beta}x + B\sin\sqrt{\beta}x] \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$y = c_1 e^{2x} + e^{2x}[A\cosh\sqrt{3}x + B\sinh\sqrt{3}x) \qquad \text{उत्तर}$$

सारांश (Summary) : याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. उच्च कोटि की रैखिक समीकरणें :

1. समघातीय समीकरणों (Homogeneous equations) का हल–

$\frac{d_n y}{dx^n} + a_1\frac{d_{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d_{n-1}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = X \Rightarrow (D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots)y = X$ का

सम्पूर्ण हल, y = पूरक हल (C.F.) + विशेष समाकल (P.I.)

यदि $X = 0$ तब $P.I. = 0 \Rightarrow y$ = पूरक हल ही सम्पूर्ण हल है।

पूरक हल ज्ञात करने के लिए,

सहायक समी० $D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ को हल कर, मूल ज्ञात करो

(i) यदि मूल वास्तविक तथा भिन्न हैं, माना कि मूल $m_1, m_2, m_3, \ldots$ हैं तब

सम्पूर्ण हल, $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + c_3e^{m_3x} + \ldots$

(ii) यदि मूल वास्तविक तथा समान (equal) हैं, माना कि मूल $m_1 = m_2, m_3 = m_4, m_5, m_6, \ldots$ हैं तब

सम्पूर्ण हल, $y = (c_1 + c_2x)e^{m_1x} + (c_3 + c_4x)e^{m_3x} + c_5e^{m_5x} + c_6e^{m_6x} + \ldots$

(iii) यदि मूल सम्मिश्र संख्यायें हैं, माना कि मूल $m_1, m_2, \ldots$ हैं तब $\alpha \pm i\beta$

सम्पूर्ण हल, $y = e^{\alpha x}[a\cos\beta x + B\sin\beta x] + c_3e^{m_3x} + c_4e^{m_4x}$

(iv) यदि मूल सम्मिश्र संख्यायें लेकिन दो बार पुनरावृत्त (repeated) हैं, तब

सम्पूर्ण हल, $y = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2x)\cos\beta x + (c_3 + c_4x)\sin\beta x] + c_5e^{m_5x} + c_6e^{m_6x} + \ldots$

(v) यदि मूल अपरिमेय (Irrational) हैं, माना कि $m = \alpha \pm \sqrt{\beta}, m_3, m_4, \ldots$ तब

सम्पूर्ण हल, $y = e^{\alpha x}[A\cosh\sqrt{\beta}x + B\sinh\sqrt{\beta}x] + c_1e^{m_3x} + c_2e^{m_4x} + \ldots$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 5 (1)

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल करो—

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0$
2. $6\frac{d^2y}{dx^2}-13\frac{dy}{dx}+6y=0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0$
4. $4\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+y=0$
5. $(D^2+D+1)y=0$, जहाँ $D=\frac{d}{dx}$
6. $(D^2-2D+4)y=0$, जहाँ $D=\frac{d}{dx}$
7. $\frac{d^3y}{dx^3}+7\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}-15y=0$
8. $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}-3y=0$
9. $(D^3+6D^2+11D+6)y=0$, जहाँ $D=\frac{d}{dx}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)
10. $(D^3-3D^2+2D)x=0$, जहाँ $D=\frac{d}{dt}$
11. $\frac{d^3y}{dx^3}-27y=0$
12. $\frac{d^4y}{dx^4}-6\frac{d^3y}{dx^3}+12\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}=0$
13. $\frac{d^4y}{dx^4}-y=0$
14. $\frac{d^4y}{dx^4}+y=0$
15. $(D-1)^2(D^2+1)^2y=0$
16. $(D^2-2D+2)y=0$, जबकि $t=0$ पर $y=Dy=1$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)
17. $(D^3-2D^2-4D+8)y=0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

उत्तरमाला 5 (1)

1. $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$
2. $y=c_1e^{\frac{2}{3}x}+c_2e^{\frac{3}{2}x}$
3. $y=(c_1+c_2x)e^{3x}$
4. $y=(c_1+c_2x)e^{x/2}$
5. $y=e^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
6. $y=e^{x}(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x)$
7. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}+c_3e^{-5x}$
8. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3e^{3x}$
9. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{-3x}$
10. $x=c_1e^{0t}+c_2e^{t}+c_3e^{2t}$
11. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{3x}$
12. $y=c_1e^{0x}+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{2x}$
13. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+(c_3\cos x+c_4\sin x)$
14. $y=e^{x/\sqrt{2}}\left(c_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-x/\sqrt{2}}\left(c_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
15. $y=(c_1+c_2x)e^{x}+(c_3+c_4x)\cos x+(c_5+c_6x)\sin x$
16. $y=e^{x}\cos x$
17. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+c_3e^{-2x}$

6. विषम घातीय (non-homogeneous) समीकरणों का हल ज्ञात करना :

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n}}+a_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+\ldots+a_ny=X$$

$$\Rightarrow \quad (D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\ldots+a_n)y=X\Rightarrow f(D)y=X$$

विषम घातीय (non-homogeneous) अवकल समीकरण है, जहाँ X, x का फलन है।

इसका हल, $y=$ पूरक फलन (C.F.) + विशेष समाकल (P.I.)

पूरक फलन ज्ञात करना हम सीख चुके हैं अतः अब हम विशेष समाकल ज्ञात करना सीखेंगे।

7. विशेष समाकल (Particular Integral) ज्ञात करना :

विशेष समाकल (P.I.) ज्ञात करने की विधि, फलन X के प्रारूप पर निर्भर करती है चूँकि फलन X, निम्न में से किसी भी रूप का हो सकता है।

(i) $X=e^{ax}$ जैसे $X=e^{4x}$ (चर घातांकीय फलन)

(ii) $X=\cos ax$, $\sin ax$, $\cos(ax+b)$, $\sin(ax+b)$, $\cos ax+\cos bx$ आदि (त्रिकोणमितीय फलन)
जैसे : $X=\cos 2x$, $X=\sin 3x$, $X=\cos x+\cos 2x$ आदि

(iii) $X=x^m$, $X=(ax+b)^m$ जैसे : $X=x^4$; $X=2x^2+3x+1$ (बीजगणितीय फलन)

(iv) $X=e^{ax}\cos bx$; $X=e^{ax}\sin bx$

(v) $X=x^m\cos ax$; $X=x^m\sin ax$, आदि

(vi) $X=\tan ax$; $X=\tan(ax+b)$

सभी स्थितियों में, $\text{P.I.}=\frac{X}{f(D)}$

8. जब $X=e^{ax}$ अर्थात् X चर घातांकीय फलन है—

तब $$\text{P.I.}=\frac{X}{f(D)}=\frac{e^{ax}}{f(D)}$$

(i) $f(D)$ में $D=a$ रख दो, यदि $f(a)\neq 0$ (देखो उदा० 9)।

(ii) यदि $f(D)=f(a)=0$ तब $f(D)$ के गुणनखण्ड करो और जिस गुणनखण्ड में $D=a$ रखने पर वह शून्य हो जाता है उसमें D के स्थान पर $(D+a)$ रखो और अन्य गुणनखण्डों में $D=a$ रखो। (देखो उदाहरण 10 तथा 11)।

उदाहरण 9. अवकल समी० $(D^3+2D^2-5D-6)y=e^{4x}$ को हल करो।

हल : सहायक समी०, $m^3+2m^2-5m-6=0$

$\Rightarrow \quad (m+1)(m-2)(m+3)=0$

$\therefore$ सहायक समी० के मूल $-1, 2, -3$ हैं।

$\Rightarrow \quad \text{C.F.}=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}$

$$\text{P.I.}=\frac{X}{f(D)}=\frac{e^{4x}}{D^3+2D^2-5D-6}=\frac{e^{4x}}{64+32-20-6}=\frac{e^{4x}}{70} \quad (D=4 \text{ रखने पर})$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

व्यापक हल, $y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x} + \frac{e^{4x}}{70}$ उत्तर

उदाहरण 10. अवकल समी० $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = e^{-2x}$ को हल करो।

हल : दी हुई अवकल समी०, $(D^2 + D - 2)y = e^{-2x}$

सहायक समी० $m^2 + m - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $(m + 2)(m - 1) = 0$

सहायक समी० के मूल = 1, – 2

$\therefore$ $\text{C.F.} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x}$

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{e^{-2x}}{D^2 + D - 2} = \frac{e^{-2x}}{(D+2)(D-1)}$$

$$= \frac{e^{-2x}}{(D-2+2)(-2-1)} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{e^{-2x}}{D}$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{3} \cdot \int 1 \cdot dx = -\frac{e^{-2x}}{3} \times x = -\frac{1}{3}xe^{-2x}$$

सम्पूर्ण हल, $y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}xe^{-2x}$ उत्तर

नोट : $\because f(D) = D^2 + D - 2$ में $D = a = -2$ रखने पर, $f(a) = 0$ $\therefore f(D)$ के गुणनखण्ड किये गये हैं। चूंकि गुणनखण्ड, $D + 2$ में $D = a = -2$ रखने पर वह शून्य हो जाता है अतः D के स्थान पर $D + a = D - 2$ लिया गया है। और दूसरे गुणनखण्ड $D = -2$ रखा गया है फिर $\frac{1}{D} = \int 1 \cdot dx$ का प्रयोग किया गया है। विद्यार्थीगण इस नियम को समझ लें और याद कर लें।

उदाहरण 11. अवकल समी० $(D^4 + 5D^3 + 6D^2 - 4D - 8)y = e^{-2x} + e^x$ को हल करो।

हल : सहायक समी० (A.E.) $= m^4 + 5m^3 + 6m^2 - 4m - 8 = 0$

$\Rightarrow$ $(m - 1)(m + 2)^3 = 0$ $\Rightarrow$ सहायक समी० के मूल 1, – 2, – 2, – 2 हैं।

$\Rightarrow$ $\text{C.F.} = c_1e^x + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^{-2x}$

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{e^{-2x} + e^x}{D^4 + 5D^3 + 6D^2 - 4D - 8} = \frac{e^{-2x} + e^x}{(D-1)(D+2)^3}$$

$$= \frac{e^{-2x}}{(D-1)(D+2)^3} + \frac{e^x}{(D-1)(D+2)^3}$$

$$= \frac{e^{-2x}}{(-2-1)(D-2+2)^3} (\because a = -2) + \frac{e^x}{(D+1-1)(1+2)^3} (\because a = 1)$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{3} \cdot \frac{1}{D^3} + \frac{e^x}{27} \cdot \frac{1}{D}$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{3} \cdot \iiint 1 \cdot dx + \frac{e^x}{27} \int 1 \cdot dx$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{3} \iint x\,dx + \frac{e^x}{27} \cdot x$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{3} \int \frac{x^2}{2} dx + \frac{xe^x}{27}$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{3} \times \frac{x^3}{6} + \frac{xe^x}{27} = \frac{-x^3e^{-2x}}{18} + \frac{xe^x}{27}$$ उत्तर

9. जब फलन $X = \cos(ax + b)$ या $\sin(ax + b)$ अर्थात् X त्रिकोणमितीय फलन है—

तब $\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{\cos(ax+b) \text{ or } \sin(ax+b)}{f(D)}$

(i) $f(D)$ में D^2 के स्थान पर $-a^2$ रखो यदि $f(-a^2) \neq 0$ (देखो उदा० 12)

(ii) यदि $f(-a^2) = 0$, तब $\frac{1}{f(D^2)} \cdot \cos(ax + b) = x \cdot \frac{1}{f'(-a^2)} \cos(ax + b)$ का प्रयोग करो।

उदाहरण 12. अवकल समीकरण $(D^2 - 4)y = \cos 3x$ को हल करो।

हल : सहायक समी० $m^2 - 4 = 0$ $\Rightarrow$ $m = 2, -2$

$\therefore$ $\text{C.F.} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{\cos 3x}{D^2 - 4} = \frac{\cos 3x}{-3^2 - 4} \quad (\because a = 3, \therefore D^2 = -a^2 = -3^2)$$

$$= \frac{\cos 3x}{-13}$$

सम्पूर्ण हल, $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{\cos 3x}{13}$ उत्तर

उदाहरण 13. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = \sin(2x + 1)$

हल : सहायक समी० $m^2 - 3m - 4 = 0$

$\Rightarrow$ $(m - 4)(m + 1) = 0$

$\Rightarrow$ $m = 4, -1$

$\therefore$ $\text{C.F.} = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{\sin(2x+1)}{D^2 - 3D - 4} = \frac{\sin(2x+1)}{-2^2 - 3D - 4} \quad (\because a = 2 \therefore D^2 = -a^2 = -2^2)$$

$$= \frac{1}{-3D - 8} \sin(2x+1) = -\frac{3D - 8}{(3D+8)(3D-8)} \sin(2x+1)$$

$$= -\frac{3D - 8}{9D^2 - 64} \sin(2x+1) = -\frac{3D - 8}{9 \times [-2]^2 - 64} \sin(2x+1)$$

$$= \frac{1}{100}(3D - 8)\sin(2x+1)$$

$$= \frac{1}{100}\left[3 \times \frac{d}{dx}(\sin 2x + 1) - 8\sin(2x+1)\right]$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$= \frac{3}{100}\cos(2x+1)\times 2 - \frac{8}{100}\sin(2x+1)$$

$$= \frac{3}{50}\cos(2x+1) - \frac{2}{25}\sin(2x+1)$$

सम्पूर्ण हल $y =$ C.F. + P.I.

$$= c_1e^{4x} + c_2e^{-x} + \frac{3}{50}\cos(2x+1) - \frac{2}{25}\sin(2x+1)$$

उदाहरण 14. समी० $(D^3 + D^2 - D - 1)y = \sin(2x+3)$ को हल करो।

हल : सहायक समी० $m^3 + m^2 - m - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $(m+1)(m^2-1) = 0 \Rightarrow m = -1, -1, 1$

$\therefore$ C.F. $= c_1e^x + (c_2 + c_3x)e^{-x}$

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{\sin(2x+3)}{D^3 + D^2 - D - 1}$$

$$= \frac{\sin(2x+3)}{D^2\cdot D + D^2 - D - 1} = \frac{\sin(2x+3)}{-2^2D + (-2^2) - D - 1}$$

$$= \frac{\sin(2x+3)}{-5D-5} = -\frac{1}{5}\frac{1}{D+1}\sin(2x+3)$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{D-1}{D^2-1}\cdot\sin(2x+3) = -\frac{1}{5}\frac{D-1}{-2^2-1}\cdot\sin(2x+3)$$

$$= \frac{1}{25}\left[\frac{d}{dx}\sin(2x+3) - \sin(2x+3)\right]$$

$$= \frac{2}{25}\cos(2x+3) - \frac{1}{25}\sin(2x+3)$$

सम्पूर्ण हल, $y =$ C.F. + P.I.

$$= c_1e^x + (c_2 + c_3x)e^{-x} + \frac{2}{25}\cos(2x+3) - \frac{1}{25}\sin(2x+3)$$

उदाहरण 15. समी० $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin x\cdot\cos 2x$

हल : सहायक समी० $m^2 + 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3i$

$\therefore$ C.F. $= (c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{\sin x\cos 2x}{D^2+9} = \frac{1}{2}\frac{\sin 3x - \sin x}{D^2+9}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D^2+9}\cdot\sin 3x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D^2+9}\cdot\sin x \quad ...(1)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-x}{2\times 3}\cos 3x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1^2+9}\cdot\sin x \quad (D^2 = a^2 \text{ रखने पर})$$

$$= -\frac{1}{12}x\cos 3x - \frac{1}{16}\sin x$$

सम्पूर्ण हल, $y =$ C.F. + P.I.

$\Rightarrow$ $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x - \frac{1}{16}\sin x$

नोट : $\frac{1}{D^2+a^2}\cos(ax+b)$ या $\frac{1}{D^2+a^2}\sin(ax+b)$ में $D^2 = -a^2$ नहीं ले सकते चूँकि $f(-a^2) = 0$ हो... है। न ही $\frac{1}{D^2+a^2}$ का परिमेयकरण (rationalisation) किया जा सकता है जैसे कि उदाहरण 13, 14 में किया गया है। स्थिति में नीचे दी गई दो विधियों में से ही किसी एक विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

प्रथम विधि :

(i) $\frac{1}{D^2+a^2}\sin(ax+b) = \frac{-x}{2a}\cos(ax+b)$ जब $f(-a^2) = 0$

(ii) $\frac{1}{D^2+a^2}\cos(ax+b) = \frac{x}{2a}\sin(ax+b)$, जब $f(-a^2) = 0$

इन्हीं सूत्रों के आधार पर, उदा० 15 में $\frac{\sin 3x}{D^2+9} = \frac{-x}{2\times 3}\cos 3x$ लिया गया है

$(\because a = 3, \text{ से } f(-3^2) = -3^2 + 9 = 0)$

द्वितीय विधि :

$\frac{1}{f(D^2)}\sin(ax+b) = x\cdot\frac{1}{f'(-a^2)}\sin(ax+b)$ के सूत्र के प्रयोग से,

$$\frac{1}{D^2+9}\sin 3x = x\cdot\frac{1}{2D}\cdot\sin 3x = \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{D}\cdot\sin 3x$$

$$= \frac{x}{2}\int\sin 3x\,dx = \frac{x}{2}\times\frac{-\cos 3x}{3} = \frac{-x\cos 3x}{6}$$

से भी ज्ञात किया जा सकता था।

उदाहरण 16. समीकरण $(D^2 + a^2)y = \cos ax$ को हल करो।

हल : सहायक समीकरण, $m^2 + a^2 = 0 \Rightarrow m = \pm ai$

$\therefore$ C.F. $= (c_1\cos ax + c_2\sin ax)$

$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{\cos ax}{D^2+a^2} = \frac{x}{2a}\sin ax$ (उदा० 15 के नोट की प्रथम विधि में दिये गये सूत्र से)

सम्पूर्ण हल $= c_1\cos ax + c_2\sin ax + \frac{x}{2a}\sin ax$

10. जब $X = x^n$ या $(ax+b)^n$ अर्थात् X एक बीजगणितीय फलन है :

तब $\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{x^n}{f(D)}$

$\frac{x^n}{f(D)} = [f(D)]^{-1}\cdot x^n$ को $[1 + f(D)]^{-1}x^n$ या $[1 - f(D)]^{-1}x^n$ के रूप में रूपान्तरित करो। फिर $[1 + f(D)]^{-1}$... का द्विपद प्रमेय की सहायता से D की आरोही घातों में nवीं घात तक प्रसार करो। विधि नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 17. समीकरण $(D^3 - 3D^2 + 2D)y = x^2$ को हल करो।

हल : सहायक समी०, $m^3 - 3m^2 + 2m = 0$

$$m(m^2 - 3m + 2) = 0$$

$\Rightarrow$ $$m(m-2)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, 1, 2$$

$\Rightarrow$ $$\text{C.F.} = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$$

$\therefore$ $$\text{P.I.} = \frac{x^2}{D^3 - 3D^2 + 2D} = \frac{x^2}{2D\left(1 - \frac{3D}{2} + \frac{D^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 + \left(\frac{-3D}{2} + \frac{D^2}{2}\right)\right]^{-1} \cdot x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 - \left(\frac{-3D}{2} + \frac{D^2}{2}\right) + \left(\frac{-3D}{2} + \frac{D^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3D}{2} + \frac{D^2}{2}\right)^3 + \ldots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 + \frac{3D}{2} + D^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{4}\right) + D^3\left(-\frac{3}{2} + \frac{27}{8}\right)\right] x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 + \frac{3D}{2} + \frac{7D^2}{4} + \frac{15D^3}{8}\right] x^2$$

$$= \left[\frac{1}{2D} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}D + \frac{15}{8}D^2\right] x^2$$

$$= \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{3x^2}{4} + \frac{7}{8} \times \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{15}{16}\frac{d^2}{dx^2}(x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{7}{8} \times 2x + \frac{15}{16} \times 2 = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x}{4} + \frac{15}{8}$$

सम्पूर्ण हल, $y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x}{4} + \frac{15}{8}$ **उत्तर**

उदाहरण 18. समीकरण $(D^2 + 2D - 5)y = 2x^2 - 3x + 1$ का विशेष समाकल (Particular Integral) ज्ञात करो।

हल : $$\text{P.I.} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{D^2 + 2D - 5} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{-5\left(1 - \frac{2}{5}D - \frac{D^2}{5}\right)}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[1 - \left(\frac{2D}{5} + \frac{D^2}{5}\right)\right]^{-1}(2x^2 - 3x + 1)$$

$$= -\frac{1}{5}\left[1 + \left(\frac{2D}{5} + \frac{D^2}{5}\right) + \left(\frac{2D}{5} + \frac{D^2}{5}\right)^2 + \ldots\right](2x^2 - 3x + 1)$$

$$= -\frac{1}{5}\left[1 + \frac{2D}{5} + \left(\frac{D^2}{5} + \frac{4D^2}{25}\right) + \ldots\right](2x^2 - 3x + 1)$$

$$= -\frac{1}{5}\left[1 + \frac{2D}{5} + \frac{9D^2}{25} + \ldots\right](2x^2 - 3x + 1)$$

$$= -\frac{1}{5}(2x^2 - 3x + 1) - \frac{2}{25}(4x - 3) - \frac{9}{125} \times 4$$

$$= -\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} - \frac{8}{25}x + \frac{6}{25} - \frac{36}{125} = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{7x}{25} - \frac{31}{125}$$ **उत्तर**

उदाहरण 19. समीकरण $(D^4 - a^4)y = x^4$ को हल करो।

हल : सहायक समीकरण $m^4 - a^4 = 0 \Rightarrow m = \pm a, \pm ai$

$\therefore$ $$\text{C.F.} = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + (c_3 \cos ax + c_4 \sin ax)$$

$$\text{P.I.} = \frac{x^4}{D^4 - a^4} = \frac{x^4}{-a^4\left(1 - \frac{D^4}{a^4}\right)} = -\frac{1}{a^4}\cdot\left(1 - \frac{D^4}{a^4}\right)^{-1} x^4$$

$$= -\frac{1}{a^4}\left(1 + \frac{D^4}{a^4} + \ldots\right) x^4$$

$$= -\frac{1}{a^4}\left(x^4 + \frac{1}{a^4} \times 24\right) \qquad \left[\because (D^4)x^4 = \frac{d^4}{dx^4}(x^4) = 24\right]$$

$$= -\frac{1}{a^4}\left(x^4 + \frac{24}{a^4}\right)$$

व्यापक हल $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$

$\Rightarrow$ $$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax - \frac{x^4}{a^4} - \frac{24}{a^8}$$ **उत्तर**

11. जब $X = \sinh ax$ या $X = \cosh ax$ अर्थात् X एक अतिपरवलयक **(Hyperbolic)** फलन है :

$$\text{P.I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{\sinh ax \text{ या } \cosh ax}{f(D)}$$ में $D^2 = a^2$ रख कर हल करें।

उदाहरण 20. समीकरण $(D^3 + 5D)y = \sinh 2x$ को हल करें।

हल : सहायक समीकरण $m^3 + 5m = 0 \Rightarrow m(m^2 + 5) = 0$

$\Rightarrow$ $$m = 0, m = \pm\sqrt{5}\,i$$

$\therefore$ $$\text{C.F.} = c_1 e^{0x} + (c_2 \cos\sqrt{5}x + c_3 \sin\sqrt{5}x)$$

$$\text{P.I.} = \frac{\sinh 2x}{D^3 + 5D} = \frac{\sinh 2x}{D^2 \cdot D + 5D} = \frac{\sinh 2x}{2^2 \cdot D + 5D} \quad (D^2 = a^2 = 2^2 \text{ रखने पर})$$

$$= \frac{\sinh 2x}{9D} = \frac{1}{9}\cdot\int \sinh 2x\, dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{\cosh 2x}{2} = \frac{1}{18}\cosh 2x$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

12. जब X, दो या दो से अधिक फलनों का गुणनफल अथवा भागफल है—

इस प्रकार की समीकरणों का हल निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगा।

उदाहरण 21. समीकरण $(D^2 - 2D + 4)y = e^x \cdot \cos 2x$ का विशेष समाकल (P. I.) ज्ञात करो।

हल :
$$\text{P. I.} = \frac{e^x \cos 2x}{D^2 - 2D + 4}$$

$\because$ e^x में x का गुणांक $a = 1$, $\therefore$ D के स्थान $(D + 1)$ लेने पर,

$$\text{P. I.} = e^x \times \frac{\cos 2x}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 4} = e^x \times \frac{\cos 2x}{D^2 + 3}$$

$$= e^x \times \frac{\cos 2x}{-2^2 + 3} \quad (D^2 = -a^2 = -2^2 \text{ रखने पर})$$

$$= -e^x \times \cos 2x$$

उदाहरण 22. अवकल समीकरण $(D^2 - 4)y = x^2 e^{3x}$ का विशेष समाकल (P. I.) ज्ञात करो।

हल : विधि : e^{ax} को संक्रिया (operation) से बाहर निकालें और D के स्थान पर $D + a$ रखकर हल करें।

$$\text{P. I.} = \frac{x^2 e^{3x}}{D^2 - 4} = e^{3x} \cdot \frac{x^2}{(D+3)^2 - 4} = e^{3x} \times \frac{x^2}{D^2 + 6D + 5}$$

$$= e^{3x} \times \frac{x^2}{5\left[1 + \left(\frac{6D}{5} + \frac{D^2}{5}\right)\right]} = \frac{e^{3x}}{5} \times \left[1 + \left(\frac{6D}{5} + \frac{D^2}{5}\right)\right]^{-1} x^2$$

$$= e^{3x} \times \left[1 - \left(\frac{6D}{5} + \frac{D^2}{5}\right) + \left(\frac{6D}{5} + \frac{D^2}{5}\right)^2 + \ldots\right] x^2$$

$$= e^{3x} \times \left[1 - \frac{6D}{5} - \frac{D^2}{5} + \frac{36D^2}{25} + \ldots\right] x^2$$

$$= e^{3x} \times \left[1 - \frac{6D}{5} + \frac{31D^2}{25} + \ldots\right] x^2$$

$$= e^{3x}\left[x^2 - \frac{6}{5} \times 2x + \frac{31}{25} \times 2\right] = \frac{e^{3x}}{25}[25x^2 - 60x + 62]$$

उदाहरण 23. समीकरण $(D^2 + 3D + 2)y = e^{2x} \sin x$ का विशेष समाकल (P. I.) ज्ञात करो।

हल :
$$\text{P. I.} = \frac{e^{2x} \sin x}{D^2 + 3D + 2}$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{\sin x}{(D+2)^2 + 3(D+2) + 2} \quad (e^{2x} \text{ को बाहर तथा } D = D + 2 \text{ रखने पर})$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{\sin x}{D^2 + 7D + 12} = e^{2x} \cdot \frac{\sin x}{-1^2 + 7D + 12} \quad (D^2 = -1^2 \text{ रखने पर})$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{\sin x}{7D + 11} \times \frac{7D - 11}{7D - 11}$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{(7D - 11)\sin x}{49D^2 - 121}$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{(7D - 11)\sin x}{49 \times (-1^2) - 121} \quad (\text{पुनः } D^2 = -1^2 \text{ रखने पर})$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{-1}{170}(7D - 11)\sin x$$

$$= \frac{-e^{2x}}{170}(7\cos x - 11\sin x)$$

उदाहरण 24. $(D^2 - 2D + 1)y = x\cos x$ का विशेष समाकल ज्ञात करो।

हल :
$$\text{P. I.} = \frac{x\cos x}{D^2 - 2D + 1}$$

$$= x \cdot \frac{1}{D^2 - 2D + 1}\cos x + \frac{d}{d(D)} \cdot \left[\frac{1}{D^2 - 2D + 1}\right]\cos x$$

$$= x \cdot \frac{1}{-1^2 - 2D + 1} \cdot \cos x + \frac{d}{d(D)} \cdot (D^2 - 2D + 1)^{-1}\cos x$$

$$= x \cdot \frac{1}{-2D}(\cos x) - \frac{2D - 2}{(D^2 - 2D + 1)^2}\cos x$$

$$= \frac{-x}{2}\int \cos x\, dx - \frac{2(D - 1)}{(-1^2 - 2D + 1)^2}\cos x$$

$$= -\frac{x}{2} \cdot \sin x - 2\frac{D - 1}{4D^2} \cdot \cos x$$

$$= \frac{-x\sin x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{D - 1}{-1^2}\cos x$$

$$= \frac{-x\sin x}{2} + \frac{1}{2}(D - 1)\cos x$$

$$= \frac{-x\sin x}{2} + \frac{1}{2}(-\sin x - \cos x)$$

$$= -\frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$$

13. अचर गुणांकों वाले रैखिक समीकरणों में परिवर्तनशील समीकरणें (Equations Reducible to Linear Form with Constant Coefficients) :

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = X$$

i.e.
$$(a_0 x^n D^n + a_1 x^{n-1} D^{n-1} + a_2 x^{n-2} D^{n-2} + \ldots + a_n)y = X$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर (constants) हैं तथा X या तो x का फलन है या कोई अचर है, समघात अवकल (Homogeneous Differential Equation) है चूँकि प्रत्येक पद में x की घात तथा अवकलज (deriv... समान है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

इस समीकरण को इयूलियर कॉशी समीकरण (Euler-Cauchy's Equation) भी कहते हैं।

ऐसी समीकरणें $x = e^z$ के प्रतिस्थापन (substitution) द्वारा अचर गुणांकों वाली रैखिक समीकरणों में परिवर्तित (reduce) हो जाती हैं। तब उन्हें उसी प्रकार से हल करते हैं जैसे कि इसी अध्याय के पिछले अनुच्छेदों में किया गया है। परिवर्तित करने की विधि नीचे समझाई गई है।

विधि (Method) :

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n}} + a_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = X \qquad \ldots(1)$$

माना कि $x = e^z$, तब $z = \log x$ तथा $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{1}{x} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = Dy,$ जहाँ $D = \frac{d}{dz}$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy/dz}{x}\right) = \frac{x \cdot \frac{d^2y}{dz^2} \times \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dz} \times 1}{x^2}$

$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x \cdot \frac{d^2y}{dz^2} \times \frac{1}{x} - \frac{dy}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} = (D^2 - D)y$

$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

इसी प्रकार, $x^3 \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$

$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)(D-2) \ldots (D-n+1)y$

इन मानों को समी॰ (1) में रखने पर वह अचर गुणांकों की रैखिक समीकरण में परिवर्तित हो जाती है।

उदाहरण 25. अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4$ को हल करो।

हल : $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4$

इसमें $x\frac{dy}{dx} = Dy$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ तथा $x = e^z$ रखने पर

$$D(D-1)y - 2Dy - 4y = e^{4z}$$

$\Rightarrow$ $(D^2 - 3D - 4)y = e^{4z}$

सहायक समी॰ A.E, $m^2 - 3m - 4 = 0$

$\Rightarrow$ $(m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 4, -1$

$\therefore$ C. F. $= c_1 e^{4z} + c_2 e^{-z}$

$$\text{P. I.} = \frac{e^{4z}}{D^2 - 3D - 4} = \frac{e^{4z}}{(D-4)(D+1)} = \frac{e^{4z}}{(D+4-4)(4+1)}$$

$$= \frac{e^{4z}}{5D} = \frac{e^{4z}}{5} \cdot \int 1\, dz = \frac{e^{4z}}{5} \times z$$

सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I.

$$= c_1 e^{4z} + c_2 e^{-z} + \frac{ze^{4z}}{5}$$

$$= c_1 x^4 + c_2 x^{-1} + \frac{\log x \times x^4}{5} \quad (\because e^z = x \text{ i.e. } z = \log x)$$

$$= c_1 x^4 + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{5}x^4 \log x$$

उत्तर

नोट : e^{4z} से $a = 4$ है और P. I. ज्ञात करते समय $D = 4$ रखने पर $D^2 - 3D - 4$ शून्य हो जाता है अतः $D^2 - 3D - 4$ के गुणनखण्ड $(D-4)(D+1)$ किये गये हैं। $(D-4)$ में D के स्थान पर $D + a$ अर्थात् $D + 4$ रखा गया है, $(D+1)$ में $D = 4$ रखा गया है और $\frac{1}{D} = \int 1 \cdot dz$ लिया गया है (देखो नियम उदाहरण 10 के नोट में)।

उदाहरण 26. समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$ को हल करो।

हल : $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$

इसमें $x\frac{dy}{dx} = Dy$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ तथा $x = e^z$ रखने पर

$$D(D-1)y - 3Dy + 4y = 2e^{2z}$$

$\Rightarrow$ $(D^2 - D - 3D + 4)y = 2e^{2z}$

$\Rightarrow$ $(D^2 - 4D + 4)y = 2e^{2z}$

सहायक समी॰ (A.E.), $m^2 - 4m + 4 = 0$

$(m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2, 2$

$\therefore$ पूरक फलन, C.F. $= (c_1 + c_2 z)e^{2z}$

$$\text{P. I.} = \frac{X}{f(D)} = \frac{2e^{2z}}{D^2 - 4D + 4}$$

$$= \frac{2e^{2z}}{(D-2)^2} = \frac{2e^{2z}}{(D+2-2)^2} \quad (D \text{ के स्थान पर } D+2 \text{ रखने पर})$$

$$= \frac{2e^{2z}}{D^2} = 2e^{2z} \cdot \iint 1 \cdot dz = 2e^{2z} \cdot \int z\, dz$$

$$= 2e^{2z} \cdot \frac{z^2}{2} = z^2 e^{2z}$$

सम्पूर्ण हल, $y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = (c_1 + c_2 z)e^{2z} + z^2 \cdot e^{2z}$, लेकिन $x = e^z \Rightarrow z = \log x$

$\therefore$ $y = (c_1 + c_2 \log x)x^2 + (\log x)^2 . x^2 = x^2(c_1 + c_2 \log x + \log^2 x)$

उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 27. समी० $(x^3D^2 + 2x^2D - 2x)y = 1$ को हल करो।

हल :
$$(x^3D^2 + 2x^2D - 2x)y = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{1}{x}$$

इसमें $\frac{x\,dy}{dx} = Dy$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ तथा $x = e^z$ रखने पर,

$$D(D-1)y + 2Dy - 2y = \frac{1}{e^z}$$

$$\Rightarrow \quad (D^2 + D - 2)y = e^{-z}$$

सहायक समीकरण, $\quad m^2 + m - 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad (m+2)(m-1) = 0 \Rightarrow m = -2, 1$$

$$\therefore \quad \text{C.F.} = c_1e^{-2z} + c_2e^z = c_1x^{-2} + c_2x$$

$$\text{P.I.} = \frac{e^{-z}}{D^2 + D - 2} = \frac{e^{-z}}{(-1)^2 + (-1) - 2} \qquad (\because a = -1 \therefore D = -1 \text{ रखने पर})$$

$$= \frac{e^{-z}}{-2} = -\frac{1}{2}x^{-1} = -\frac{1}{2x}$$

सम्पूर्ण हल, $\quad y = \frac{c_1}{x^2} + c_2x - \frac{1}{2x}$ उत्तर

उदाहरण 28. समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ को हल करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

हल : दी हुई समी० में $x\frac{dy}{dx}$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ तथा $x = e^z$ अर्थात् $\log x = z$ रखने पर,

$$D(D-1)y - Dy + y = 2z$$

$$\Rightarrow \quad (D^2 - 2D + 1)y = 2z$$

सहायक समी० $\quad m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1, 1$

$$\therefore \quad \text{C.F.} = (c_1 + c_2z)e^z$$

$$\text{P.I.} = \frac{2z}{D^2 - 2D + 1} = \frac{2z}{(D-1)^2} = \frac{2z}{(1-D)^2}$$

$$= 2(1-D)^{-2}\cdot z = 2[1 + 2D + 3D^2 + ...]z$$

$$= 2[z + 2 \times \frac{d}{dz}(z) + 0 = 2(z + 2 \times 1)] = 2z + 4$$

सम्पूर्ण हल, $\quad y = (c_1 + c_2z)e^z + 2z + 4 = (c_1 + c_2\log x)x + 2\log x + 4$ उत्तर

सारांश (Summary) : याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

2. विषमघातीय (non-homogeneous) समीकरणों का हल :

यदि $X \neq 0$ अर्थात् X, x का कोई फलन है, तब $\quad y = C.F. + P.I.$ —(1)

विशेष समाकल (P.I.) ज्ञात करने की विधि, X के प्रारूप (type) पर निर्भर करती है।

फलन X, निम्न में से किसी भी रूप का हो सकता है।

(i) $X = e^{ax}$, जैसे : $X = e^{4x}$

(ii) $X = \cos ax, \sin ax, \cos(ax + b), \sin(ax + b), \cos(ax + \cos bx) \tan ax$ आदि।

(iii) $X = x^m, (ax + b)^m$, जैसे : $X = x^3, X = x^2 + 2x - 1$

(iv) $X = e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$, जैसे : $X = e^{2x}\cos 3x, e^{-4x}\sin 2x$

(v) $X = x^m\cos ax, x^m\sin ax$, जैसे : $X = x^2\cos 3x, x^3\sin 4x$

सभी स्थिति में $P.I. = \frac{X}{f(D)}$ का प्रयोग कर विशेष समाकल ज्ञात करें। (देखो उदाहरण 9 से 24 तक)

तब (1) से सम्पूर्ण हल $y = C.F. + P.I.$ ज्ञात करें।

3. अचर गुणांकों वाले समीकरणों में परिवर्तनशील समीकरणें :

यदि समी० $u = x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_2x^{n-2}\frac{d_{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_ny = X$ रूप की है तो $x = e^z$ रखने पर, समी० अचर गुणांकों वाली रैखिक समीकरण में बदल जाती है फिर उपरोक्त विधियों के प्रयोग से समीकरण हल हो जाती है (देखो उदा० 25 से 28)।

अभ्यासमाला 5 (2)

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो—

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-3x}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)
3. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$
4. $\frac{d^3y}{dx^3} - y = (1 + e^x)^2$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = \cos 2x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 2x$
7. $(D^2 + 4)y = \cos 2x$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x \cos 2x$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x + \sin 2x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)
10. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

11. $(D^2 + 3D + 2)y = e^{2x} \sin x$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

13. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^3$

14. $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = x^3$

15. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 - 5x + 2$

16. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{3x}$

17. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x + \sin x$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin x$

19. $(D^2 + 1)(D^2 + 4)y = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

20. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x\log x$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

21. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = x\log x$

22. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^3$

23. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4$

24. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 20y = (1 + x)^2$

25. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{(1 - x)^2}$

26. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

27. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y + x^4\sin x = 0$

28. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = x + \log x$

29. $\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5\right)y = \sin(\log x)$

30. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

31. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 18y = 2^x$ (संकेत : $2^x = e^{x\log 2}$ लें)

32. $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sin ax$

33. $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \cos ax$

34. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x\cos x$

संकेत : $\text{P.I.} = \frac{xe^x\cos x}{D^2 - 2D + 1} = e^x\frac{x\cos x}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 1}$

$= e^x \cdot \frac{x\cos x}{D^2} = e^x \cdot \frac{1}{D} \cdot \int x\cos x\,dx$

$= e^x\int(x\sin x + \cos x)\,dx = e^x \cdot (2\sin x - x\cos x)$

उत्तरमाला 5 (2)

1. $y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$

2. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{2}xe^{-3x}$

3. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x} - \frac{1}{6}x^3e^{-x}$

4. $y = c_1e^x + e^{-x/2}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - 1 + \frac{2xe^x}{3} + \frac{e^{2x}}{7}$

5. $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + \frac{1}{8}\sin 2x$

6. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{20}(3\cos 2x + \sin 2x)$

7. $y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x$

8. $y = c_1\sin x + c_2\cos x + \frac{x}{4}\sin x - \frac{1}{16}\cos 3x$

9. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{e^x}{3} - \frac{\sin 2x}{8}$

10. $y = c_1e^x + (c_2\cos x + c_3\sin x)e^x + xe^x + \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x)$

11. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{170}e^{2x}(11\sin x - 7\cos x)$

12. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{36}(6x + 1)$

13. $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^3 + 6x^2 + 9x + 6)$

14. $y = (c_1 + c_2x)e^{0x} + (c_3 + c_4x)e^x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2$

15. $y = c_1e^{-2x} + e^x(c_2\cos x + c_3\sin x) + \frac{1}{4}(3x^2 - 2x + 1)$

16. $y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{e^{3x}}{8}(2x^2 - 4x + 3)$

17. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^x - \frac{1}{4}(2x + 1) - \frac{\cos x + 3\sin x}{10}$

18. $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{9}(3x\sin x - 2\cos x)$

19. $y = (c_1\cos x + c_2\sin x) + (c_3\cos 2x + c_4\sin 2x) + \frac{x}{12}\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

20. $y = x\,[c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x)] + x \log x$

21. $y = (c_1 + c_2 \log x)\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{x}{27}(3\log x - 2)$

22. $y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{8}x^3$

23. $y = \frac{c_1}{x} + c_2 x^4 + \frac{1}{5}x^4 \log x$

24. $y = c_1 x^{-5} + c_2 x^4 - \frac{x^2}{14} - \frac{x}{9} - \frac{1}{20}$

25. $y = \frac{1}{x}(c_1 + c_2 \log x) - \frac{1}{x}\log(1-x)$

26. $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$

27. $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + x^2 \sin x$

28. $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{x}{6} + \frac{1}{2}\log x - \frac{3}{2}$

29. $y = [A\cos(\log x) + B\sin(\log x)] + \frac{1}{8}[\sin(\log x) + \cos(\log x)]$

30. $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{e^x}{x^2}$

31. $y = c_1 e^{3x} + e^{-x}(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x) + \frac{2^x}{(\log 2)^3 - (\log 2)^2 - 18}$

32. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{x}{2a}\sin ax$

33. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{x}{2a}\cos ax$

34. $y = (c_1 + c_2 x)e^x + e^x(2\sin x - x\cos x)$

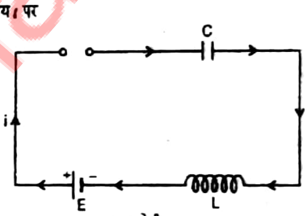
6 अवकल समीकरणों के सरल अनुप्रयोग
(Simple Applications of Differential Equations)

1. प्रस्तावना (Introduction) :

पिछले अध्यायों में ज्ञात अवकल समीकरणों को हल करना सिखाया गया है। इस अध्याय में हम विद्युत परिपथ, गुरुत्वीय गति, न्यूटन का शीतलीकरण नियम, रेडियोएक्टिव क्षय, सरल आवर्त गति, ओह्म का नियम, स्प्रिंग में दोलन आदि से सम्बन्धित अवकल समीकरण की रचना करेंगे और फिर उनके प्रयोग से सम्बन्धित समस्याओं को हल करेंगे।

2. विद्युत परिपथ (Electrical Circuits) :

(1) L-C श्रेणी पथ (L-C Series Circuit)—नीचे चित्र में एक विद्युत परिपथ दिखाया गया है जिसमें C संधारित्र (capacitor) है तथा प्रतिरोध-रहित, प्रेरकत्व कुण्डली (inductance) L है जो एक सैल E के साथ श्रेणी क्रम में जुड़े हैं। यदि संधारित्र C की प्लेटों पर आवेश q तथा विद्युत परिपथ में धारा i बह रही है और संधारित्र (capacitor) की धारिता (capacity) C है, तब किसी समय t पर



(L-C श्रेणी पथ)

(i) प्रेरकत्व कुण्डली L के अनुदिश (across the inductance L)

वोल्टता ड्राप (voltage drop), $E_L = L \times \frac{di}{dt} = L \times \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)$ $\quad \left(\because i = \frac{dq}{dt}\right)$

$$= L \times \frac{d^2q}{dt^2}$$

(ii) संधारित्र की धारिता C के अनुदिश (across capacitor)

वोल्टता ड्राप (voltage drop), $E_C = \frac{q}{C}$

(iii) किरचॉफ के प्रथम नियम के अनुसार,

$$L \times \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

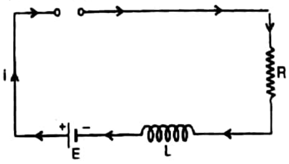
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0, \quad \text{जहां } \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(2) L-R श्रेणी पथ (L-R Series Circuit)—नीचे के विद्युत परिपथ में प्रेरकत्व (Inductance) L तथा प्रतिरोध R सैल E के साथ श्रेणी क्रम में जुड़े हैं। यदि किसी समय t पर परिपथ में धारा का मान i है, तब



किरचॉफ के वोल्टता के नियम से

$$E_R + E_L = E$$

$\Rightarrow$ $$iR + L \times \frac{di}{dt} = E \qquad (\because E_R = i \times R)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \times i = \frac{E}{L}$$

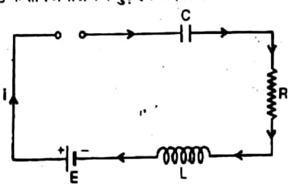
जो L-R परिपथ का रैखिक अवकल समीकरण है।

इसका हल,

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L} \times t}) \text{ है।}$$

स्पष्ट है कि धारा i समय t के साथ बढ़ती है और महत्तम मान E/R प्राप्त कर लेती है।

(3) L-C-R श्रेणी पथ (L-C-R Series Circuit)—नीचे के विद्युत परिपथ में प्रेरकत्व (Inductance) L, प्रतिरोध R तथा धारिता (capacitor) C, सैल E के साथ श्रेणी क्रम में जुड़े हैं। यदि किसी समय t पर परिपथ में धारा का मान i है, तब



किरचॉफ वोल्टता के द्वितीय नियम से R, L तथा C के अनुदिश वोल्टेज ड्राप का योग E के बराबर है।

$\Rightarrow$ $$E_R + E_L + E_C = E$$

$\Rightarrow$ $$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E \qquad \text{[देखो अनुच्छेद 6.2 (1)]}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dq}{dt} \times R + L \times \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = E \qquad \left(\because i = \frac{dq}{dt}\right)$$

$\Rightarrow$ $$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

जोकि L-C-R परिपथ का रैखिक अवकल समीकरण है।

उदाहरण 1. 100 ओम के प्रतिरोध तथा 1·0 हेनरी के प्रेरकत्व (inductance) को 50 वोल्ट की एक बैटरी के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। परिपथ में धारा i का मान समय t के फलन के रूप में ज्ञात करो।

हल : $R = 100$ ओम; $L = 1 \cdot 0$ हेनरी (H); $E = 50$ वोल्ट

परिपथ में बहने वाली धारा,

$$i = \frac{E}{R}[1 - e^{-\frac{R}{L} \times t}] \qquad \text{[देखो अनुच्छेद 6.2 (2)]}$$

$$= \frac{50}{100}[1 - e^{-\frac{100}{1} \times t}] = \frac{1}{2}[1 - e^{-100t}] \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. 12 ओम के प्रतिरोध तथा 3 हेनरी के प्रेरकत्व को 60 वोल्ट की एक बैटरी के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। परिपथ में 0·025 सेकण्ड पश्चात् धारा का मान ज्ञात करो। ($e^{-0 \cdot 1} = 0 \cdot 9048$)

हल : $R = 12$ ओम, $L = 3$ हेनरी, $E = 60$ वोल्ट, $t = 0 \cdot 025$ सेकण्ड

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L} \times t}) = \frac{60}{12}(1 - e^{-\frac{12}{3} \times 0 \cdot 025})$$

$$= 5(1 - e^{-0 \cdot 1}) = 5(1 - 0 \cdot 9048)$$

$$= 5 \times 0 \cdot 0952 = 0 \cdot 4760 \text{ ऐम्पियर} \qquad \text{उत्तर}$$

3. न्यूटन के शीतलीकरण का नियम (Newton's Law of Cooling) :

इस नियम के अनुसार, किसी वस्तु के ठण्डे होने की दर उस वस्तु के तापक्रम तथा उसे घेरे हुए माध्यम के तापक्रम के अन्तर के समानुपाती होती है।

माना कि किसी समय t पर वस्तु का तापक्रम θ है तथा माध्यम का तापक्रम T है, तब वस्तु के ठण्डे होने की दर,

$$\frac{d\theta}{dt} \propto (\theta - T)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T), \quad \text{जहाँ } k \text{ नियतांक है।}$$

जो ठण्डे होने की दर के लिए रैखिक अवकल समीकरण है।

हल करने के लिए, $$\int \frac{d\theta}{\theta - T} = -\int k\, dt$$

$\Rightarrow$ $$\log(\theta - T) = -kt + C$$

प्रारम्भ में अर्थात् $t = 0$ पर माना कि वस्तु का तापक्रम θ_1 था। तब $\log(\theta_1 - T) = 0 + C$

(C) का यह मान (1) में रखने पर, $\log(\theta - T) = -kt + \log(\theta_1 - T)$

$\Rightarrow$ $$\log(\theta - T) - \log(\theta_1 - T) = -kt$$

$\Rightarrow$ $$\log\left(\frac{\theta - T}{\theta_1 - T}\right) = -kt \Rightarrow \frac{\theta - T}{\theta_1 - T} = e^{-kt}$$

$\Rightarrow$ $$\theta - T = (\theta_1 - T)e^{-kt}$$

$\Rightarrow$ $$\theta = T + (\theta_1 - T)e^{-kt}$$

उदाहरण 3. यदि एक वस्तु जिसका तापक्रम 85°C है, एक कमरे में रखी है और कमरे का तापक्रम 20°C है। यदि 15 मिनट पश्चात् वस्तु का तापक्रम 65°C हो जाता है तो बताइए कि 30 मिनट पश्चात् वस्तु का तापक्रम क्या होगा?

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल : θ_1 = प्रारम्भिक तापक्रम = 85°C, T = कमरे का तापक्रम = 20°C

t = 15 मिनट पश्चात् तापक्रम, $\theta = 65°C$

$$\theta = T + (\theta_1 - T)e^{-kt}$$

$$\Rightarrow \quad 65 = 20 + (85 - 20)\,e^{-k \times 15}$$

$$\Rightarrow \quad 45 = 65e^{-k \times 15} \Rightarrow e^{-15k} = \frac{9}{13}$$

30 मिनट पश्चात् तापक्रम $\theta = T + (\theta_1 - T)e^{-kt} = 20 + (85 - 20)\,e^{-k \times 30}$

$$= 20 + 65 \times (e^{-15k})^2 = 20 + 65 \times \left(\frac{9}{13}\right)^2$$

$$= 20 + 31{\cdot}15 = 51{\cdot}15°\,C$$ उत्तर

4. रेडियोएक्टिव तत्वों के क्षय का अवकल समीकरण–

(Differential Equation for the Decay of Radioactive Elements) :

कुछ तत्व जैसे यूरेनियम, रेडियम, पोलिनियम ऐसे हैं कि उनके द्रव्यमान लगातार कम होते रहते हैं। ऐसा, उनके अस्थाई नाभिक के कारण होता है। ऐसे तत्वों को रेडियोएक्टिव तत्व कहते हैं।

किसी क्षण रेडियोएक्टिव तत्व के द्रव्यमान में द्रव्यमान क्षय की दर, उस क्षण उस तत्व के द्रव्यमान के समानुपाती होती है (Rate of decay in the mass of a radioactive substance is directly proportional to its mass).

यदि किसी समय t पर, रेडियोएक्टिव तत्व का द्रव्यमान x है तो द्रव्यमान के क्षय होने की दर,

$$\frac{dx}{dt} \propto x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -kx, \quad \text{जहाँ } x \text{ नियतांक है।}$$

जो द्रव्यमान के क्षय होने की रैखिक अवकल समीकरण है।

उदाहरण 4. किसी रेडियोएक्टिव पदार्थ का द्रव्यमान 20 वर्ष में अपने प्रारम्भिक द्रव्यमान का $\frac{1}{4}$ रह जाता है। कितने समय में उसका द्रव्यमान $\frac{1}{16}$ रह जाएगा ?

हल :
$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -k\int dt \quad \Rightarrow \quad \log x = -kt + c \qquad ...(1)$$

माना कि $t = 0$ पर द्रव्यमान $x = m_0$, तब

$$\log m_0 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = \log m_0$$

c का मान (1) में रखने पर, $\log x = -kt + \log m_0$ ...(2)

जब $t = 20$ वर्ष, $x = \frac{m_0}{4}$

$$\therefore \quad \log\frac{m_0}{4} = -k \times 20 + \log m_0$$

$$\Rightarrow \quad 20k = \log m_0 - \log\frac{m_0}{4} = \log 4$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\log 4}{20} = \frac{\log 2}{10} \qquad ...(3)$$

माना कि t वर्ष पश्चात् द्रव्यमान $\frac{1}{16}$ हो जाएगा, *i.e.*, $x = \frac{m_0}{16}$

समी० (2) से, $\log\left(\frac{m_0}{16}\right) = -kt + \log m_0$

समी० (3) से k का मान रखने पर, $\log\left(\frac{m_0}{16}\right) = -\frac{\log 2}{10} \times t + \log m_0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\log 2}{10} \times t = \log m_0 - \log\left(\frac{m_0}{16}\right) = \log 16$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{10 \log 16}{\log 2} = \frac{10 \times 4 \log 2}{\log 2} = 40 \text{ वर्ष}$$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि किसी रेडियोएक्टिव पदार्थ के द्रव्यमान t_1 तथा t_2 वर्षों पश्चात् क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं तो उस पदार्थ का अर्द्ध आयु काल ज्ञात करो।

हल : हम जानते हैं कि द्रव्यमान क्षय में द्रव्यमान विघटन की दर का अवकल समीकरण,

$$\frac{dx}{dt} = -kx \text{ जहाँ } x, \text{ पदार्थ का द्रव्यमान है।}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x} = -k\int 1\,.\,dt \quad \Rightarrow \quad \log x = -kt + c \qquad ...(1)$$

माना कि जब $t = 0$ तब द्रव्यमान $x = m$

$$\Rightarrow \quad \log m = -0 + c \quad \Rightarrow \quad c = \log m$$

समी० (1) में c का मान रखने पर, $\log x = -kt + \log m$ ...(2)

$\because$ जब $t = t_1$ तब $x = m_1$ तथा जब $t = t_2$ तब $x = m_2$

$\therefore$ समी० (2) से, $\log m_1 = -kt_1 + \log m$

तथा $\log m_2 = -kt_2 + \log m$

$$\Rightarrow \quad \log m_1 - \log m_2 = -k(t_1 - t_2) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\log(m_1/m_2)}{t_2 - t_1}$$

माना कि पदार्थ का अर्द्ध आयु काल t वर्ष है। तब $\because x = \frac{m}{2}$

$$\therefore \quad \log\frac{m}{2} = -kt + \log m \qquad \{(2) \text{ से}\}$$

$$\Rightarrow \quad kt = \log m - \log\left(\frac{m}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad kt = \log\left(\frac{m}{m/2}\right) = \log 2$$

इसमें k का मान रखने पर $\frac{\log(m_1/m_2)}{t_2 - t_1} \times t = \log 2$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log(m_1/m_2)}$$ उत्तर

5. जनसंख्या वृद्धि के लिए अवकल समीकरण (D.E. for Population Growth) :

हमारे देश की जनसंख्या वृद्धि की दर जनसंख्या के समानुपाती है।

$\therefore$ यदि किसी समय t पर जनसंख्या y है तो $\frac{dy}{dt} \propto y$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = ky \qquad \text{जहाँ } k \text{ नियतांक है।}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 6. यदि किसी देश की जनसंख्या 25 वर्षों में दुगुनी हो जाती है तो कितने वर्षों में तीन गुनी हो जाएगी ?

हल : $\because \frac{dy}{dt} = ky \quad \therefore \quad \int \frac{dy}{y} = k \int 1 \, . \, dt$

$\Rightarrow \quad \log y = kt + c \qquad \ldots(1)$

प्रारम्भ में, जब $t = 0$, माना कि जनसंख्या P थी । तब

$\log P = 0 + c \quad \Rightarrow c = \log P$

c का मान समी० (1) में रखने पर, $\log y = kt + \log P \qquad \ldots(2)$

जब $t = 25$ वर्ष, $y = 2P$

$\therefore \quad \log 2P = k \times 25 + \log P$

$\Rightarrow \quad \log 2P - \log P = 25k \Rightarrow k = \frac{\log 2}{25}$

माना कि t वर्ष पश्चात् जनसंख्या तीन गुनी हो जाएगी ।

तब $\log 3P = kt + \log P \qquad$ {(2) से}

$\Rightarrow \quad kt = \log 3P - \log P = \log 3$

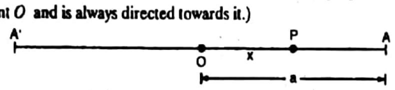
$\Rightarrow \quad \frac{\log 2}{25} \times t = \log 3$

$\Rightarrow \quad t = \frac{\log 3}{\log 2} \times 25 = \frac{1 \cdot 732 \times 25}{1 \cdot 414} = 30 \cdot 62$ वर्ष उत्तर

6. सरल आवर्त गति (Simple Harmonic Motion) :

यदि एक कण इस प्रकार गति करता है कि उसमें त्वरण, एक स्थिर बिन्दु (fixed point) O से विस्थापन (displacement) के समानुपाती है और सदा बिन्दु की दिशा में कार्यरत होता है, तो कण की गति सरल आवर्त गति कहलाती है ।

(Motion of a particle is called S.H.M. if its acceleration is directly proportional to its displacement from a fixed point O and is always directed towards it.)



यदि किसी समय t पर, स्थिर बिन्दु O से कण का विस्थापन x हो, तो

त्वरण $\propto$ विस्थापन $\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} \propto x$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 . x$

अर्थात् $(D^2 + \mu^2) x = 0$, जहाँ μ अचर राशि है ।

यह सरल आवर्त गति का रैखिक अवकल समीकरण है । इस समीकरण का हल

$x = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t \qquad \ldots(1)$ है ।

बिन्दु P पर कण का वेग, $\frac{dx}{dt} = \mu (-c_1 \sin \mu t + c_2 \cos \mu t) \qquad \ldots(2)$

यदि $OA = a$ और कण बिन्दु A से, विराम (rest) स्थिति से चलना प्रारम्भ करता है तब

समी० (1) से, $a = c_1 \times 1 + 0 \quad (\because x = a, t = 0) \Rightarrow c_1 = a$

समी० (2) से, $0 = \mu (0 + c_2) \Rightarrow c_2 = 0$

समी० (1) तथा (2) में $c_1 = a$ तथा $c_2 = 0$ रखने पर,

$x = a \cos \mu t \qquad \ldots(3)$

$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -a\mu \sin \mu t = -\mu \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \ldots(4)$

जिससे समय t पर कण का विस्थापन x और वेग $\frac{dx}{dt}$ ज्ञात किए जा सकते हैं ।

सरल आवर्त गति (Simple Harmonic Motion) के गुण :

1. प्रकृति (Nature)—कण जब A से O की ओर चलना आरम्भ करता है तो उसमें त्वरण बिन्दु O की ओर होता है इसलिए वेग बढ़ता रहता है । O पर वेग महत्तम हो जाता है तथा त्वरण शून्य हो जाता है । O से आगे A' की ओर बढ़ने पर मंदन (retardation) शुरू हो जाता है जिससे वेग कम होता जाता है और A' पर वेग शून्य हो जाता है । कण पुनः अपने पथ का प्रत्यानुसरन (retrace) करते हुए O पर आता है और O से A पर पहुंच कर अपना एक दोलन पूरा करता है । इस प्रकार वह एक सरल रेखा में A तथा A' के बीच दोलन करता रहता है जिसे सरल आवर्त गति कहते हैं ।

2. आयाम (Amplitude)—O से अधिकतम दूरी OA को कण का आयाम कहते हैं । प्रायः आयाम को $OA = a$ से प्रदर्शित करते हैं ।

3. आवर्त काल (Periodic Time)—A से A' तक जाने में और फिर A' से A तक आने में लगे समय को आवर्त काल या दोलन काल कहते हैं । यह दोलन काल, $T = \frac{2\pi}{\mu}$ के बराबर होता है ।

4. आवृत्ति (Frequency)—कण एक सेकण्ड में जितने दोलन करता है, वह उसकी आवृत्ति कहलाती है । यदि कण एक सेकण्ड में दोलन करता है तो, $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{(2\pi/\mu)} = \frac{\mu}{2\pi}$

उदाहरण 7. एक कण 18 सेमी० आयाम तथा 2 सेकण्ड के आवर्तकाल से सरल आवर्त गति (S.H.M.) कर रहा है । उस समय कण में त्वरण ज्ञात करो जब वह माध्य स्थिति से 6 सेमी की दूरी पर है ।

हल : त्वरण $f = \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x$, जहाँ $\mu = \frac{2\pi}{T}$

यहाँ पर $a = 18$ सेमी०, $x = 6$ सेमी०, $T = 2$ सेकण्ड

$\mu = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3 \cdot 14$

त्वरण, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x = -(3 \cdot 14)^2 \times 6 = -59 \cdot 16$ सेमी० /सेकण्ड^2 उत्तर

ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि त्वरण माध्य स्थिति की ओर है ।

उदाहरण 8. एक कण आयाम 24 सेमी० तथा आवर्तकाल 6 सेकण्ड के साथ सरल आवर्त गति (S.H.M.) कर रहा है । दो बिन्दु माध्य स्थिति से 12 सेमी० तथा 8 सेमी० दूरी पर कण के एक ही ओर हैं । इन बिन्दुओं के बीच की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा ?

हल : यहाँ पर $a = 24$ सेमी०, $T = 6$ सेकण्ड

$\mu = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$x = a \cos \mu t \qquad$ [देखो अनुच्छेद 6.6 में परिणाम (3)]

माना कि t_1 समय पश्चात् कण माध्य स्थिति से 12 सेमी० दूरी पर था तथा t_2 समय पश्चात् 8 सेमी० दूरी पर था । तब

$12 = 24 \cos\left(\frac{\pi}{3} t_1\right) \Rightarrow t_1 = \frac{3}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{2}$

तथा $8 = 24 \cos\left(\frac{\pi}{3} t_2\right) \Rightarrow t_2 = \frac{3}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{3}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

घटाने पर,
$$t_2 - t_1 = \frac{3}{\pi}\left(\cos^{-1}\frac{1}{3} - \cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{\pi}(70 \cdot 73^\circ - 60^\circ) = \frac{3}{\pi} \times 10 \cdot 73^\circ = \frac{3}{\pi} \times 10 \cdot 73 \times \frac{\pi}{180} \text{ सेकण्ड}$$
$$= 0 \cdot 18 \text{ सेकण्ड}$$
उत्तर

उदाहरण 9. एक कण की, जो सरल आवर्त गति कर रहा है, तीन उत्तरोत्तर सेकण्डों के अन्त में माध्य स्थिति से दूरियाँ x_1, x_2, x_3 हैं तो कण के दोलन काल का समय ज्ञात कीजिए।

हल : $x = a \cos \mu t$

माना कि समय $t, t+1, t+2$ के बाद कण की दूरियाँ x_1, x_2, x_3 हैं। तब

$$x_1 = a \cos \mu t \quad ...(1)$$
$$x_2 = a \cos [\mu (t+1)] \quad ...(2)$$
$$x_3 = a \cos [\mu (t+2)] \quad ...(3)$$

$\Rightarrow$ $$x_1 + x_3 = a [\cos \mu t + \cos \mu (t+2)]$$
$$= a \times 2 \cos \frac{\mu t + \mu (t+2)}{2} \cdot \cos \left(\frac{\mu (t+2) - \mu t}{2}\right)$$
$$= 2a \cos \mu (t+1) \cdot \cos \mu$$
$$= 2x_2 \cos \mu \qquad [\because \text{ समी॰ (2) से } a \cos \mu (t+1) = x_2]$$

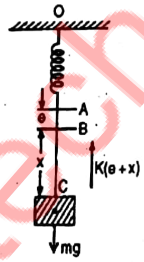
$\Rightarrow$ $$\cos \mu = \frac{x_1 + x_3}{2x_2} \Rightarrow \mu = \cos^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)$$

$$\text{दोलन काल} = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\cos^{-1}\left[(x_1 + x_3)/2x^2\right]}$$
उत्तर

7. स्प्रिंग के दोलन (Oscillations of a Spring) :

1. मुक्त दोलन (Free oscillations)—चित्र में एक भार रहित स्प्रिंग दिखाया गया है जिसका एक सिरा बिन्दु O पर बंधा है तथा दूसरे सिरे A से एक m द्रव्यमान का भार mg लटका है।

लटके हुए भार mg के कारण स्प्रिंग की लम्बाई बढ़ गई है। माना कि यह बढ़ी हुई लम्बाई, जिसे दीर्घीकरण (elongation) कहते हैं, $AB = e$ है। माना कि स्प्रिंग में प्रत्यास्थता (elasticity) के कारण प्रत्यानन बल (restoring force) K है। तब सन्तुलन की स्थिति में,



$$mg = T = Ke \quad ...(1)$$

माना कि गति आरम्भ होने के t समय पश्चात् द्रव्यमान C पर है। तब गति के समीकरण से,

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg - K(e + x)$$

$\Rightarrow$ $$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = Ke - Ke - Kx = -Kx$$

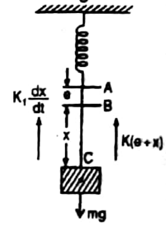
$\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m} \cdot x = -\omega^2 x, \quad \text{जहाँ } \frac{K}{m} = \omega^2$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ जो भार रहित स्प्रिंग के मुक्त दोलन का अवकल समीकरण है।

2. अवमंदित दोलन (Damped Oscillations)—

यदि द्रव्यमान m की गति में कोई प्रतिरोधी बल (force of resistance) भी काम कर रहा है तो दोलन अवमंदित (damped) हो जाते हैं और अवमंदित बल, वेग के समानुपाती हो सकता है अथवा अचर। यदि अवमंदित बल वेग के समानुपाती है तो अवमंदन (damping) को श्यान अवमंदन (viscous damping) कहते हैं।

माना कि अवमंदित बल $k_1 \cdot \frac{dx}{dt}$ है जो वेग $\frac{dx}{dt}$ के समानुपाती है। तब सन्तुलन की स्थिति में,



$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(e + x) - k_1 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$\Rightarrow$ $$m \frac{d^2x}{dt^2} = ke - ke - kx - k_1 \frac{dx}{dt}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x - \frac{k_1}{m} \frac{dx}{dt}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - 2\lambda \frac{dx}{dt}, \quad \text{जहाँ } \frac{k}{m} = \omega^2 \text{ तथा } \frac{k_1}{m} = 2\lambda$$

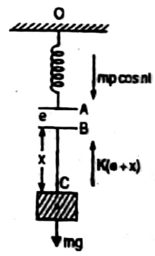
$\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

जो कि अवमंदित दोलन का अवकल समीकरण है।

3. अवमंदन रहित प्रणोदित दोलन (Forced Oscillations without Damping)—

यदि स्प्रिंग के आधार बिन्दु (point of support) पर कोई बाह्य आवर्ती बल (external periodic force) कार्य कर रहा है और स्प्रिंग उसके प्रभाव में दोलन करता है तो उसकी गति को प्रणोदित दोलन गति कहते हैं।

यदि यह बाह्य आवर्ती बल $mp \cos nt$ है तो गति का समीकरण



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(e + x) + mp \cos nt$$

$\Rightarrow$ $$m \frac{d^2x}{dt^2} = ke - ke - kx + mp \cos nt \quad (\because mg = ke)$$

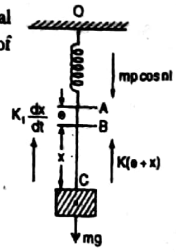
$\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x + p \cos nt$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = p \cos nt, \quad \text{जहाँ } \frac{k}{m} = \omega^2$$

यही प्रणोदित दोलन का अवकल समीकरण है।

4. अवमंदन सहित प्रणोदित दोलन (Forced Oscillations with Damping)—

यदि स्प्रिंग के आधार बिन्दु (point of support) पर कोई बाह्य आवर्ती बल (external periodic force) कार्य कर रहा है तथा द्रव्यमान m की गति में कोई अवमंदन बल (force of resistance) $k_1 \frac{dx}{dt}$ भी लगा है जो वेग के समानुपाती है। तब गति का समीकरण,



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(e + x) - k_1 \frac{dx}{dt} + mp \cos nt$$
$$= ke - ke - kx - k_1 \frac{dx}{dt} + mp \cos nt$$
$$= -kx - k_1 \frac{dx}{dt} + mp \cos nt$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{k_1}{m}\frac{dx}{dt} + p\cos nt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - 2\lambda\frac{dx}{dt} + p\cos nt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = p\cos nt, \text{ जहाँ } \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\lambda = \frac{k_1}{m}$$

जोकि अवमंदन सहित प्रणोदित दोलन का अवकल समीकरण है।

उदाहरण 10. एक स्प्रिंग में 20 किग्रा भार का बल लगाकर उसे 10 सेमी० तक खींचा जा सकता है। यदि स्प्रिंग से 10 किग्रा का एक पिण्ड लटका दिया जाए और तब पिण्ड को सन्तुलन की स्थिति में 20 सेमी० नीचे खींच कर छोड़ दिया जाए तो सन्तुलन की स्थिति से किसी समय t पर पिण्ड का विस्थापन तथा अधिकतम वेग ज्ञात करो। पिण्ड का दोलन काल भी ज्ञात करो।

हल : चूँकि 20 किग्रा भार का बल स्प्रिंग को 10 सेमी० = 0·1 मीटर तक खींच सकता है,

$\therefore \quad Mg = kx$ से

$\Rightarrow \quad 20g = k \times 0\cdot1,$ जहाँ k प्रत्यानन बल (restoring force) है

$\Rightarrow \quad k = \frac{20g}{0\cdot1} = 200g$ N/m

यदि $m = 10$ किग्रा का पिण्ड लटकाने पर लम्बाई में वृद्धि e (elongation) है,

तब $\quad mg = ke \quad \Rightarrow \quad 10g = 200g \times e \Rightarrow e = \frac{1}{20} = 0\cdot5$ मीटर

$\because$ पिण्ड को 20 सेमी० खींच कर छोड़ दिया गया है, $\therefore \; x = 20$ सेमी०

गति का समी० $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$ जहाँ $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{200g}{10} = 20g = 20 \times 9\cdot8 = 196$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{196} = 14\cdot0$$

$$\Rightarrow \quad \text{दोलन काल} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3\cdot14}{14} = 0\cdot45 \text{ सेकण्ड}$$ उत्तर

समय t पर विस्थापन, $x = a\cos\omega t$ जहाँ $a = 20$ सेमी० = 0.2 मी०

$$\Rightarrow \quad x = a\cos\omega t = 0\cdot2\cos 14t$$

वेग, $\quad \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t = -0\cdot2 \times 14 \times \sin 14t = -2\cdot8\sin 14t$

अधिकतम वेग = $-2\cdot8 \times 1 = -2\cdot8 = 2\cdot8$ मी०/से० (ऋणात्मक चिह्न वेग की दिशा को निरूपित करता है) उत्तर

उदाहरण 11. एक स्प्रिंग के निचले सिरे पर 5 किग्रा का द्रव्यमान बँधा है। स्प्रिंग का नियतांक $k = 100$ न्यूटन/मी० है और $\frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$ गति में प्रतिरोधी बल भी काम कर रहा है। पिण्ड को 10 सेमी० नीचे खींचकर छोड़ दिया गया है। गति का अवकल समीकरण लिखिए और t समय पर भार का विस्थापन ज्ञात करो।

हल : गति का अवकल समी० $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad$ ...(1)

$\because m = 5, k = 100 \;\therefore\; \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{100}{5} \Rightarrow 20$ तथा $2\lambda\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$ (दिया है)

समी० (1) में ये मान रखने पर, गति का समीकरण,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{10}\frac{dx}{dt} + 20x = 0 \quad ...(2)$$

सहायक समी० (A. E.) $m^2 + \frac{1}{10}m + 20 = 0$

$$\Rightarrow \quad 10m^2 + m + 200 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8000}}{20} = -0\cdot05 \pm 4\cdot5i$$

अतः समीकरण (2) का हल, $\quad x = e^{-0\cdot05t}(c_1\cos 4\cdot5t + c_2\sin 4\cdot5t) \quad$ ...(3)

जब $t = 0, x = 10$ cm $\therefore\; 10 = e^0(c_1 \times 1 + c_2 \times 0) \Rightarrow c_1 = 10$

(3) को अवकलित करने पर, $\frac{dx}{dt} = -0\cdot05e^{-0\cdot05t}(c_1\cos 4\cdot5t + c_2\sin 4\cdot5t)$

$$+ e^{-0\cdot05t}(-4\cdot5c_1\sin 4\cdot5t + 4\cdot5c_2\cos 4\cdot5t)$$

आरम्भ में जब $t = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0$

$$\therefore \quad 0 = -0\cdot05 \times e^0(c_1 \times 1 + c_2 \times 0) + e^0(0 + 4\cdot5c_2 \times 1)$$

$$0 = -0\cdot05 \times c_1 + 1 \times 4\cdot5c_2 \Rightarrow 0 = -0\cdot05 \times 10 + 4\cdot5c_2 \Rightarrow c_2 = 0\cdot11$$

समी० (3) में c_1 तथा c_2 के मान रखने पर,

$$x = e^{-0\cdot05t}(10\cos 4\cdot5t + 0\cdot11\sin 4\cdot5t)$$

किसी समय t पर भार का विस्थापन है। उत्तर

अभ्यासमाला 6

1. 200 ओम के प्रतिरोध तथा 2 हेनरी के प्रेरकत्व को 50 वोल्ट की एक बैटरी के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। परिपथ में धारा i का मान समय t के फलन के रूप में ज्ञात करो।
2. 20 ओम के प्रतिरोध तथा 4 हेनरी के प्रेरकत्व को 80 वोल्ट की बैटरी के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। परिपथ में 0·60 सेकण्ड पश्चात् धारा का मान ज्ञात करो। $(e^{-4} = 0\cdot01832)$
3. 20 ओम के प्रतिरोध तथा 2 हेनरी के प्रेरकत्व को 100 sin 150t वोल्ट के विद्युतवाहक बल के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। 0·1 सेकण्ड पश्चात् धारा का मान ज्ञात कीजिए।
4. एक वस्तु, जिसका तापक्रम 70°C है, एक कमरे में रखी है। कमरे का तापक्रम 30°C है। यदि वस्तु का तापक्रम 20 मिनट पश्चात् 60°C हो जाता है तो 40 मिनट पश्चात् तापक्रम क्या हो जाएगा?
5. एक पिण्ड का प्रारम्भिक तापमान 90°C है। 25 मिनट पश्चात् पिण्ड का तापमान 65°C हो जाता है जबकि वायु का तापमान 20°C है। प्रारम्भ से 50 मिनट पश्चात् पिण्ड का तापमान कितना हो जाएगा?
6. रेडियम का अर्द्धआयु काल 1600 वर्ष है। कितने वर्षों पश्चात् एक ग्राम रेडियम घटकर 0·125 ग्राम रह जाएगा?

   संकेत– सूत्र $m = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, जहाँ n = अर्द्ध कालों की संख्या $\Rightarrow 0\cdot125 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 3$

   $\because$ अर्द्ध आयु काल = 1600 वर्ष $\therefore$ अभीष्ट समय = 3 × 1600 = 4800 वर्ष उत्तर

   अथवा

   सूत्र $t = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log(m_1/m_2)}$ से $\quad 1600 = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log(1/0\cdot125)} = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log 8} = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{3\log 2}$

   $\Rightarrow \quad t_2 - t_1 = 1600 \times 3 = 4800$ वर्ष उत्तर
7. एक रेडियोएक्टिव नाभिक की अर्द्ध आयु 44 दिन है। इस नाभिक का 1 ग्राम कितने दिन में कम होकर 62·5 मिलीग्राम रह जाएगा?

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

8. यदि कोई रेडियोएक्टिव पदार्थ 60 वर्ष पश्चात् घटकर अपने का $\frac{1}{8}$ भाग रह जाता है तो उस पदार्थ का अर्द्ध आयु काल ज्ञात करो।

संकेत—सूत्र $m = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ से $\frac{1}{8} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\Rightarrow n = 3$ (अर्द्ध आयु कालों की संख्या)

सूत्र $T = n \times t_{1/2}$ से $60 = 3 \times t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = 20$ वर्ष (अर्द्ध आयु काल)

या सूत्र $t = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log(m_1/m_2)}$ से $t = \frac{60 \times \log 2}{\log\left(\frac{1}{1/8}\right)} = \frac{60 \log 2}{\log 8} = 20$ वर्ष

9. एक रेडियोएक्टिव पदार्थ की सक्रियता 20 वर्षों में घटकर अपने प्रारम्भिक मान का $\frac{1}{4}$ रह जाती है। कितने वर्षों में यह $\frac{1}{8}$ हो जाएगी?

10. किसी देश की जनसंख्या 20 वर्षों में दुगुनी हो गई है। कितने वर्षों में तीन गुनी हो जाएगी?

11. किसी देश की जनसंख्या में प्रतिवर्ष 10% की वृद्धि हो रही है। कितने वर्षों पश्चात् जनसंख्या दुगुनी हो जाएगी?

12. एक कण 10 सेमी० आयाम तथा 2 सेकण्ड आवर्तकाल के साथ सरल आवर्त गति (S.H.M.) कर रहा है। मध्य स्थिति से 8 तथा 6 सेमी० दूरी पर मध्य स्थिति के एक ही ओर दो बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं के बीच की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा?

13. एक कण 12 सेमी० आयाम तथा 4 सेकण्ड के आवर्तकाल से सरल आवर्त गति करता है। उस समय कण में त्वरण ज्ञात करो जब वह मध्य स्थिति से 4 सेमी० की दूरी पर है।

14. एक स्प्रिंग में 10 किग्रा० भार का बल लगाकर उसे 5 सेमी० तक खींचा जा सकता है। यदि स्प्रिंग के निचले सिरे पर 20 किग्रा० का भार लटका दिया जाए और तब पिण्ड को सन्तुलन की स्थिति में 10 सेमी० नीचे खींच कर छोड़ दिया जाए तो सन्तुलन की स्थिति से समय t पर पिण्ड का विस्थापन तथा अधिकतम वेग ज्ञात करो। पिण्ड का दोलन काल भी ज्ञात करो।

15. ऊर्ध्वाधर लटकी स्प्रिंग के निचले सिरे पर 20 किग्रा० का एक भार लटकाया गया है। 10 किग्रा० का बल स्प्रिंग में 5 सेमी० का खिंचाव पैदा करता है। यदि लटके पिण्ड को 8 सेमी नीचे खींचकर छोड़ दिया जाए तो t से० बाद पिण्ड का विस्थापन, अधिकतम वेग तथा दोलन काल ज्ञात करो।

16. एक स्प्रिंग का स्प्रिंग नियतांक 1000 N/m है। स्प्रिंग ऊर्ध्वाधर लटकी है और उसके निचले सिरे पर 10 किग्रा० का द्रव्यमान बँधा है। द्रव्यमान को 5 सेमी० नीचे खींचकर छोड़ दिया जाता है। स्प्रिंग का दोलन काल, आवृत्ति, आयाम तथा t समय पर विस्थापन ज्ञात करो।

उत्तरमाला 6

1. $\frac{1}{4}[1 - e^{-100t}]$
2. 3·9 एम्पियर
3. 0·3 एम्पियर
4. 52·5°C
5. 48·93°C
6. 4800 वर्ष
7. 176 दिन
8. 20 वर्ष
9. 30 वर्ष
10. $\frac{20 \log 3}{\log 2}$
11. 10 log 2
12. 0·09 सेकण्ड
13. 6·28 सेमी/सेकण्ड^2
14. $0·1 \cos 7t$; 0·7 मीटर/सेकण्ड; 0·9 सेकण्ड
15. $0·08 \cos 9·9t$; 0·792 मीटर/सेकण्ड; 0·634 सेकण्ड
16. 0·628 सेकण्ड; 1·59 दोलन/सेकण्ड; आयाम = 0·05 मी०, $x = 0·05 \cos 10t$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

खण्ड-3

अवकल गणित

(DIFFERENTIAL MATH)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

7 दो एवं तीन चरों के फलन तथा आकाश में पृष्ठों की पहचान

(Functions of Two and Three Variables and Identification of Surfaces in Space)

1. परिचय (Introduction) :

इस अध्याय में कुछ दो एवं तीन चरों वाले महत्त्वपूर्ण फलनों एवं उनके पृष्ठों के बारे में वर्णन किया जा रहा है जिनका हमें प्रायः प्रयोग करना पड़ता है। वस्तुतः उनके बारे में ज्ञान होना आवश्यक है।

2. दो चरों के फलन (Functions of Two Variables) :

1. $ax + by + c = 0$ उस सरल रेखा का समीकरण है—जो अक्षों को $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ तथा $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ बिन्दुओं पर काटती है।
2. $x^2 + y^2 = a^2$ उस वृत्त का समीकरण है—जिसका केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या a है।
3. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ उस वृत्त का समीकरण है—जिसका केन्द्र $(-g, -f)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}$ है।
4. $y^2 = 4ax$ उस परवलय का समीकरण है— जिसका शीर्ष (0, 0), अक्ष $y = 0$ अर्थात् x-अक्ष, नाभि $(a, 0)$, नाभिलम्ब $4a$ तथा नियता $x + a = 0$ है।
5. $x^2 = 4ay$ उस परवलय का समीकरण है—जिसका शीर्ष (0, 0), अक्ष $x = 0$ अर्थात् y-अक्ष, नाभि $(0, a)$, नाभिलम्ब $4a$ तथा नियता $y + a = 0$ है।
6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ उस दीर्घवृत्त का समीकरण है—जिसका केन्द्र (0, 0), नाभियाँ $(\pm ae, 0)$, दीर्घ अक्ष $= 2a$, लघु अक्ष $= 2b$, नियताएँ $x = \pm\frac{a}{e}$, नाभिलम्ब $x = \pm ae$ तथा $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ जहाँ $e < 1$ है।
7. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ उस अतिपरवलय का समीकरण है—जिसका केन्द्र (0, 0), नाभियाँ $(\pm ae, 0)$, अनुप्रस्थ अक्ष $2a$, संयुग्मी अक्ष $2b$, नियताएँ $x = \pm\frac{a}{e}$, नाभिलम्ब $x = \pm ae$ तथा $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$, $e > 1$ है।

3. तीन चरों के फलन (Functions of Three Variables) :

यदि कोई बिन्दु किसी समतल में स्थित है तो उसकी स्थिति निर्देशांक अक्षों x-अक्ष तथा y-अक्ष के सापेक्ष ज्ञात की जा सकती है और समतल में स्थित वक्र का समीकरण दो चरों (x तथा y) में सम्बन्धित होता है लेकिन यदि कोई बिन्दु अन्तरिक्ष (space) में स्थित है तो उसकी स्थिति x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष के सापेक्ष ज्ञात की जा सकती है और अन्तरिक्ष (space) में स्थित पृष्ठों का समीकरण तीन चरों x, y, z में सम्बन्धित होता है।

आगे तीन चरों के कुछ महत्त्वपूर्ण फलनों एवं पृष्ठों के समीकरणों का वर्णन किया गया है।

1. $ax + by + cz + d = 0$ उस समतल (plane) का समीकरण है—जिसके अभिलम्ब (normal) की दिक्-कोज्याएँ (direction cosines) a, b, c हैं।
2. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ उस समतल का समीकरण है—जो अक्षों को $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ बिन्दुओं पर काटता है अर्थात् अक्षों पर a, b, c लम्बाई के अन्तःखण्ड बनाता है। अतः इसे समतल का अन्तःखण्ड रूपी समीकरण कहते हैं।

www.polytechnicknabar.in

Scanned by CamScanner

3. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ उस गोले (sphere) का समीकरण है—जिसका केन्द्र (0, 0, 0) तथा त्रिज्या r है।
4. $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ उस गोले का समीकरण है—जिसका केन्द्र (a, b, c) है तथा त्रिज्या r है।
5. $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ उस गोले का समीकरण है—जिसका केन्द्र $(-u, -v, -w)$ है तथा त्रिज्या $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ है।
6. $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$ उस गोले का समीकरण है—जिसके व्यास के सिरे (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) हैं।
7. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gxz + 2fyz = 0$ उस शंकु का समीकरण है—जिसका शीर्ष (0, 0, 0) है।
8. $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$ उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण है—जिसका शीर्ष (0, 0, 0), अक्ष z-अक्ष तथा अर्द्धशीर्ष कोण α है।
9. $f(x, y) = 0, z = 0$ उस बेलन (cylinder) का समीकरण है—जो वक्र $f(x, y) = 0, z = 0$ से होकर जाता है तथा उसका अक्ष z-अक्ष के समान्तर है।

4. शांक्वज (Conicoids) :

वे पृष्ठ (surfaces), जिनको निर्देशांक समतलों (XOY, YOZ, XOZ) के समान्तर तलों से काटने पर प्राप्त परिच्छेद (sections), शांक्व (conics) अर्थात् परवलय, दीर्घवृत्त अथवा अतिपरवलय होते हैं, शांक्वज (conicoids) कहलाते हैं। नीचे इस प्रकार के शांक्वजों के समीकरण दिए गए हैं।

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ दीर्घवृतज (Ellipsoid) का समीकरण है।
   इसका केन्द्र (0, 0, 0) पर होता है और x-अक्ष को $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$ y-अक्ष को $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ तथा z-अक्ष को $C(0, 0, c)$, $C'(0, 0, -c)$ बिन्दुओं पर मिलता है। इन बिन्दुओं को दीर्घवृतज के शीर्ष कहते हैं। मूल बिन्दु से शीर्षों की दूरियाँ a, b, c दीर्घवृतज के अर्धांश (semi-axes) कहलाते हैं।
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ एक पृष्ठीय अतिपरवलयज (One sheet hyperboloid) है।
   इसका केन्द्र मूल बिन्दु (0, 0, 0) पर है। x-अक्ष को $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$; y-अक्ष को $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ पर मिलता है लेकिन z-अक्ष को अधिकल्पित बिन्दुओं पर मिलता है। एक-पृष्ठी अतिपरवलयज का xy समतल के समान्तर समतल $z = k$ द्वारा काटा गया खण्ड दीर्घवृत्त होता है।
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ द्वि-पृष्ठी अतिपरवलयज (Two sheets hyperboloid) है।
   इसका केन्द्र मूल बिन्दु (0, 0, 0) पर है। x-अक्ष को $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$ पर काटता है जबकि y-अक्ष तथा z-अक्ष को काल्पनिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करता है।
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$ दीर्घवृत्तीय परवलयज (Elliptic paraboloid) का समीकरण है।
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$ अतिपरवलयिक परवलयज (Hyperbolic paraboloid) का समीकरण है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. समीकरण $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 12y + 12z - 6 = 0$ क्या निरूपित करती है?

हल : $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 12y + 12z - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 6z - 3 = 0$

जोकि $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz - d = 0$ के रूप का है अतः यह एक गोले (sphere) को निरूपित करता है।

$\because$ $u = 2, v = -3, w = 3$ $\therefore$ केन्द्र $= (-u, -v, -w) = (-2, 3, -3)$

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d} = \sqrt{4 + 9 + 9 + 3} = 5$$ उत्तर

उदाहरण 2. समीकरण $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0$ किस वक्र का समीकरण है? इसके अंगों को बताइए।

हल : $x^2 + 6x = 8y - 25 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 8y - 25 + 9$

$\Rightarrow (x + 3)^2 = 8y - 16 \Rightarrow (x + 3)^2 = 8(y - 2) \Rightarrow X^2 = 8Y,$ ...(1)

जहाँ $X = x + 3, Y = y - 2, a = 2$

यह समीकरण $X^2 = 4aY$ रूप का है अतः परवलय को निरूपित करता है।

दिये हुए परवलय का शीर्ष $(h, k) = (-3, 2)$ तथा अक्ष $X = 0$, *i.e.* $x + 3 = 0$

परवलय (1) की नाभि $(0, a) = (0, 2)$

$\Rightarrow$ दिये हुए पयलय की नाभि $= (0 - 3, 2 + 2) = (-3, 4)$ नाभिलम्ब की लम्बाई, $4a = 4 \times 2 = 8$

नाभिलम्ब का समीकरण, $Y = a \Rightarrow y - 2 = 2$, *i.e.*, $y - 4 = 0$

नियता का समीकरण, $Y = -a \Rightarrow y - 2 = -2$ *i.e.*, $y = 0$

उदाहरण 3. समीकरण $36x^2 + 9y^2 + 64z^2 - 576 = 0$ से निरूपित होने वाला पृष्ठ क्या है?

हल : $36x^2 + 9y^2 + 64z^2 = 576 \Rightarrow \frac{36x^2}{576} + \frac{9y^2}{576} + \frac{64z^2}{576} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{9} = 1$

जो $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के रूप का है अतः यह दीर्घवृत्तज (ellipsoid) का समीकरण है। इसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है तथा इसके अर्द्धाक्ष 4, 8, 3 हैं। यह अक्षों को $(\pm 4, 0, 0)$; $(0, \pm 8, 0)$ तथा $(0, 0, \pm 3)$ बिन्दुओं पर मिलता है। उत्तर

उदाहरण 4. समीकरण $12x^2 - 25y^2 + 3z^2 = 300$ किस पृष्ठ को निरूपित करता है?

हल : $12x^2 - 25y^2 + 3z^2 = 300 \Rightarrow \frac{12x^2}{300} - \frac{25y^2}{300} + \frac{3z^2}{300} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{100} = 1$

जो $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के रूप का है अतः एक-पृष्ठी अतिपरवलयज (one sheet hyperboloid) को निरूपित करता है। इसका केन्द्र (0, 0, 0) है तथा यह x-अक्ष को $(\pm 5, 0, 0)$, y-अक्ष को अधिकल्पित बिन्दुओं पर, z-अक्ष को $(0, 0, \pm 10)$ पर काटता है। उत्तर

उदाहरण 5. समीकरण $9x^2 - y^2 - 4z^2 = 36$ किस पृष्ठ को निरूपित करता है?

हल : $9x^2 - y^2 - 4z^2 = 36 \Rightarrow \frac{9x^2}{36} - \frac{y^2}{36} - \frac{4z^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1$

जो $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ के रूप का है अतः यह द्वि-पृष्ठी अतिपरवलयज (two sheet hyperboloid) को निरूपित करता है। इसका केन्द्र (0, 0, 0) है तथा x-अक्ष को $(\pm 2, 0, 0)$, y-अक्ष को अधिकल्पित बिन्दुओं पर, z-अक्ष को भी अधिकल्पित बिन्दुओं पर मिलता है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 7

1. समीकरण $3x^2 + 4y^2 - 24x - 24y + 36 = 0$ किस वक्र का समीकरण है ? वक्र के अंगों का वर्णन कीजिए।
2. समीकरण $y^2 + 4y - 8x + 12 = 0$ किस वक्र का समीकरण है ? उस वक्र के अंगों (features) का वर्णन कीजिए।
3. समीकरण $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 4 = 0$ किस वक्र का समीकरण है ?
4. समीकरण $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 144 = 0$ से निरूपित होने वाला पृष्ठ क्या है ? इसका केन्द्र तथा अर्द्धाक्ष (semi axes) भी ज्ञात कीजिए।
5. $x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ जिस पृष्ठ को निरूपित करता है उसका नाम बताओ। वक्र का केन्द्र तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो जहाँ यह पृष्ठ अक्षों को काटता है।
6. $100x^2 - 25y^2 - 16z^2 = 400$ जिस पृष्ठ को निरूपित करता है उसका नाम बताओ। वक्र का केन्द्र तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो जहाँ यह अक्षों को काटता है।

उत्तरमाला 7

1. उस दीर्घवृत्त को निरुपित करता है जिसका
   केन्द्र = (4, 3) ; अक्षों की लम्बाइयाँ = 8, $4\sqrt{3}$; $e = \frac{1}{2}$
   नाभियाँ = (6, 3), (2, 3) ; नियताएँ : $x - 12 = 0$ तथा $x + 4 = 0$
   नाभिलम्ब : लम्बाई = 6 ; समीकरणें : $x - 6 = 0$ तथा $x - 2 = 0$
2. उस परवलय को निरुपित करता है जिसका
   शीर्ष = (1, 2) ; नाभि = (3, 2) ; अक्ष $y - 2 = 0$; नियता : $x + 1 = 0$; नाभिलम्ब का समीकरण : $x - 3 = 0$ तथा लम्बाई = 8
3. उस वृत्त को निरुपित करता है जिसका केन्द्र = (– 3, 6) तथा त्रिज्या = 7
4. उस दीर्घवृतज को निरुपित करता है जिसका केन्द्र = (0, 0, 0); अर्द्धाक्ष = 4, 3, 6
   अक्षों से प्रतिच्छेदित बिन्दु = (± 4, 0, 0); (0, ± 3, 0); (0, 0, ± 6)
5. उस एक-पृष्ठी अतिपरवलयज को निरुपित करता है जिसका केन्द्र = (0, 0, 0); अक्षों से प्रतिछेदित बिन्दु = (± 4, 0, 0); (0, ± 4, 0) तथा z - अक्ष को अधिकल्पित बिन्दु पर।
6. उस द्वि-पृष्ठी अतिपरवलयज को निरुपित करता है केन्द्र = (0, 0, 0), अक्षों से प्रतिछेदित बिन्दु = (± 2, 0, 0), y तथा z-अक्षों को अधिकल्पित बिन्दुओं पर।

8 आंशिक अवकलन
(Partial Diffrentiation)

1. प्रस्तावना (Introduction) :

प्राय: आश्रित चर राशि दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर राशियों पर निर्भर करती है जैसे : बेलन का आयतन उसकी आधार त्रिज्या r तथा ऊँचाई h पर निर्भर करता है अत: बेलन का आयतन V, स्वतन्त्र चर राशियों r तथा h का फलन है ($V = \pi r^2 h$)। आयतज का आयतन उसकी लम्बाई x, चौड़ाई y तथा ऊँचाई z पर निर्भर करता है, अत: आयतज का आयतन V, स्वतन्त्र चर राशियों x, y, z का फलन है ($V = xyz$)। इस प्रकार

$z = f(x, y)$ में z दो स्वतन्त्र चरों x तथा y का फलन है और $u = f(x, y, z)$ में u, तीन स्वतन्त्र चरों x, y, z का फलन है। चूँकि हम एक समय पर केवल एक स्वतन्त्र चर राशि के सापेक्ष अवकलन कर सकते हैं इसलिए जब ऐसे फलनों का x के सापेक्ष अवकलन करते हैं तब अन्य स्वतन्त्र चर राशियों y तथा z को स्थिर मान लेते हैं। इस प्रकार के अवकलन को आंशिक अवकलन (Partial Differentiation) कहते हैं।

$z = f(x, y)$ में, y को स्थिर मान कर x के सापेक्ष अवकल गुणांक को $\frac{\partial z}{\partial x}$ या f_x या $D_x f$ से निरूपित करते हैं; x को स्थिर मान कर y के सापेक्ष अवकल गुणांक को $\frac{\partial z}{\partial y}$ या f_y या $D_y f$ से निरूपित करते हैं। इन आंशिक अवकल गुणांकों को पुन: भी अवकलित किया जा सकता है।

$\frac{\partial z}{\partial x}$ को x के सापेक्ष पुन: अवकलित करने पर प्राप्त दूसरे अवकल गुणांक को $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ या f_{xx} से निरूपित करते हैं। $\frac{\partial z}{\partial y}$ के y के सापेक्ष दूसरे अवकल गुणांक को $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ या f_{yy} से निरूपित करते हैं। z को पहले x और फिर y के सापेक्ष किए गए अवकलन से प्राप्त अवकल गुणांक को $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ अर्थात् $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ से निरूपित करते हैं, पहले y फिर x के सापेक्ष अवकल गुणांक को $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ अर्थात् $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ से निरूपित करते हैं। इसी नियम के आधार पर तीसरा, चौथा, --- आदि अर्थात् $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{d^3 z}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ ..... आदि आंशिक अवकलज प्राप्त किए जा सकते हैं।

2. आंशिक अवकल गुणांक ज्ञात करना (To Find Partial Differential Coefficient) :

फलन $z = f(x, y)$ में y को स्थिर मानकर x के सापेक्ष अवकल गुणांक, $\frac{\partial z}{\partial x} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x + \delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}$

और x को स्थिर मानकर y के सापेक्ष अवकल गुणांक, $\frac{\partial z}{\partial y} = \underset{\delta y \to 0}{Lt} \frac{f(x + y + \delta y) - f(x, y)}{\delta y}$

चूँकि आंशिक अवकलन प्रक्रिया, साधारण अवकलन की प्रक्रिया के ही तद्रूप (similar) है अत: आगे दिए गए नियम आंशिक अवकलन के लिए भी सत्य है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(i) **दो फलनों के योग का अवकल गुणांक (Differential coefficient of a sum)**–

यदि $z = u + v$, जहाँ u तथा v, x तथा y के फलन हैं

तब $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y}$$

(ii) **दो फलनों के गुणन का अवकल गुणांक (Differential coefficient of a product)**–

यदि $z = u \cdot v$ जहाँ u तथा v, x तथा y के फलन हैं

तब, $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot v) = u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

तथा $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u \cdot v) = u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

(iii) **दो फलनों के भाग का अवकल गुणांक (Differential coefficient of a quotient)**–

यदि $z = \frac{u}{v}$, जहाँ u तथा v, x तथा y के फलन हैं

तब, $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

तथा $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}$$

(iv) **फलन के फलन का अवकल गुणांक (Differential coefficient of a function of function)**–

यदि z, t का फलन है तथा t, x तथा y का फलन है

तब $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

तथा $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$$

नोट : z के t सापेक्ष अवकल गुणांक को $\frac{dz}{dt}$ लिया गया है न कि $\frac{\partial z}{\partial t}$, चूंकि z केवल एक चर राशि t का फलन है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. $2x^2 + 5xy + 3y^2$ **के प्रथम क्रम के आंशिक अवकल गुणांक ज्ञात करो।**

हल : माना कि $z = 2x^2 + 5xy + 3y^2$

y को स्थिर राशि मानकर, x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(5xy) + \frac{\partial}{\partial x}(3y^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2) + 5y\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(3y^2)$$

$$= 4x + 5y \times 1 + 0 = 4x + 5y$$ उत्तर

x को स्थिर राशि मानकर, y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2) + 5x\frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = 0 + 5x \times 1 + 6y = 5x + 6y$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $z = 3x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x + 3y + 2$ **तो द्वितीय क्रम के सभी अवकल गुणांक ज्ञात करो तथा सिद्ध करो कि** $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

हल : $$z = 3x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x + 3y + 2$$

y को स्थिर मानकर, x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 4y \times 1 + 0 - 7 \times 1 + 3 \times 0 + 0 = 6x + 4y - 7 \quad ...(1)$$

x को स्थिर मानकर, y के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 4x \times 1 + 4y - 0 + 3 \times 1 + 0 = 4x + 4y + 3 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) को x के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \times 1 + 4 \times 0 - 0 = 6 \quad ...(3)$$

समीकरण (2) को y के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 + 4 \times 1 + 0 = 4 \quad ...(4)$$

समीकरण (1) को y के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 + 4 \times 1 - 0 = 4 \quad ...(5)$$

समीकरण (2) को x के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4 \times 1 + 0 + 0 = 4 \quad ...(6)$$

समी० (5) तथा (6) से, $$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$ सिद्ध

उदाहरण 3. यदि $u = \log(x^2 + y^2)$ तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y}$ **ज्ञात कीजिए।**

हल : y को स्थिर राशि मानकर, x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \times \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} \times (2x + 0) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$ उत्तर

x को स्थिर राशि मानकर, y के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} \times \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2} \times (0 + 2y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 4. यदि $u = \sin\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)$ तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $\because$ $u = \sin\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)$

$\therefore$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \times \frac{xy \times \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - (x^2+y^2) \times \frac{\partial}{\partial x}(xy)}{x^2y^2}$$

$$= \cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \times \frac{xy\,(2x+0) - (x^2+y^2) \times y \times 1}{x^2y^2}$$

$$= \cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \times \frac{2x^2y - x^2y - y^3}{x^2y^2}$$

$$= \cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \times \frac{x^2y - y^3}{x^2y^2} = \cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \times \frac{x^2-y^2}{x^2y}$$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि $u = \log\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)$ तो दिखाओ कि $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

हल :

$$u = \log\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = \log(x^2+y^2) - \log x - \log y \quad ...(1)$$

समी० (1) को x के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} \times 2x - \frac{1}{x} - 0 = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} \quad ...(2)$$

समी० (1) को y के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2} \times 2y - 0 - \frac{1}{y} = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \quad ...(3)$$

समी० (2) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)^{-1} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x\,[-(x^2+y^2)^{-2} \times (0+2y)] - 0 = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \quad ...(4)$$

समी० (3) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y}\right)$$

$$= 2y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-1} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= 2y\,[-(x^2+y^2)^{-2} \times (2x+0)] - 0$$

$$= \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \quad ...(5)$$

(4) तथा (5) से, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ सिद्धम्

उदाहरण 6. यदि $z = x \sin y + y \sin x$ तो $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ज्ञात करने के लिए पहले x को स्थिर मानकर z का y के सापेक्ष अवकलन करना होगा। इससे $\frac{\partial z}{\partial y}$ प्राप्त होगा। फिर इस $\frac{\partial z}{\partial y}$ को y स्थिर मानकर x के सापेक्ष अवकलित करने से $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ प्राप्त होगा।

$$z = x \sin y + y \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y + \sin x \times 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y + \sin x) = \cos y + \cos x$$ उत्तर

उदाहरण 7. यदि $u = e^{xy}$ तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ तथा $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ज्ञात करो।

हल : $u = e^{xy}$

y को स्थिर मानकर, x के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xy} \times \frac{\partial}{\partial x}(xy) = e^{xy} \times y$ ($\because$ y स्थिर है)

अब इसे, y को स्थिर मानकर x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} \cdot y)$$

$$= y \cdot e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \cdot e^{xy} \cdot y = y^2 e^{xy}$$ उत्तर

इसी प्रकार, $\because$ $u = e^{xy}$

$\therefore$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = e^{xy} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot e^{xy}) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}e^{xy} = x \cdot e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \cdot e^{xy} \cdot x = x^2 e^{xy}$$ उत्तर

उदाहरण 8. यदि $u = x^2y^3z^4 + x^2y + y^2z + z^2x$ तो $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial z}$ के मान ज्ञात करो।

हल :

$$u = x^2y^3z^4 + x^2y + y^2z + z^2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3z^4 + 2xy + z^2$$ ($\because$ y तथा z स्थिर है)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2z^4 + x^2 + 2yz$$ ($\because$ x तथा z स्थिर है)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 + y^2 + 2zx$$ ($\because$ x तथा y स्थिर है)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 9. यदि $u = x \log xy$, जहाँ $x^3 + y^3 + 3xy = 1$, तो $\frac{du}{dx}$ ज्ञात करो।

हल : यदि $u = f(x, y)$, तब $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ ...(1)

$$u = x \log xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y + \log xy \,.\, 1 = 1 + \log xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}$$

$\because \quad x^3 + y^3 + 3xy = 1$

$\therefore \quad 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 3\left(x\frac{dy}{dx} + y \,.\, 1\right) = 0$

$\Rightarrow \quad (3y^2 + 3x) \cdot \frac{dy}{dx} = -3x^2 - 3y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x^2 + y}{y^2 + x}\right)$

ये मान (1) में रखने पर, $\frac{du}{dx} = 1 + \log xy + \frac{x}{y} \cdot \frac{-(x^2 + y)}{(y^2 + x)} = 1 + \log xy - \frac{x(x^2 + y)}{y(y^2 + x)}$ उत्तर

उदाहरण 10. यदि $x^y + y^x = a$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

हल : माना कि $u = x^y + y^x - a = 0$ चूँकि यह अस्पष्ट फलन है,

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right)$ (सूत्र)

$\because \quad u = x^y + y^x - a$

$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \,.\, \log y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \,.\, \log x + xy^{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right) = -\left(\frac{yx^{y-1} + y^x \,.\, \log y}{x^y \,.\, \log x + xy^{x-1}}\right)$$ उत्तर

नोट : उपरोक्त सूत्र का वर्णन अनुच्छेद 5 में किया गया है।

उदाहरण 11. यदि $y^x + x^y = (x + y)^{x+y}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $y^x + x^y - (x + y)^{x+y} = 0$

माना कि $f(x, y) = y^x + x^y - u$, जहाँ $u = (x + y)^{x+y}$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y^x \log y - yx^{y-1} - \frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y} = xy^{y-1} + x^y \log x - \frac{\partial u}{\partial y}$ ...(1)

$$u = (x + y)^{x+y} \Rightarrow \log u = (x + y) \log (x + y)$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = (x + y) \cdot \frac{1}{x + y} \cdot (1 + 0) + \log (x + y) \times (1 + 0)$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u[1 + \log (x + y)] = (x + y)^{x+y}[1 + \log (x + y)]$

इसी प्रकार, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x + y)^{x+y}[1 + \log (x + y)]$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y}$ के ये मान (1) में रखने पर

तब, $\frac{\partial f}{\partial x} = y^x \log y + yx^{y-1} - (x + y)^{x+y}[1 + \log (x + y)]$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \,.\, y^{x-1} + x^y \,.\, \log x - (x + y)^{x+y}[1 + \log (x + y)]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\partial f/\partial x)}{(\partial f/\partial y)} = -\left[\frac{y^x \log y + yx^{y-1} - (x + y)^{x+y}[1 + \log (x + y)]}{xy^{x-1} + x^y \log x - (x + y)^{x+y}[1 + \log (x + y)]}\right]$$ उत्तर

उदाहरण 12. यदि $(\cos x)^y - (\sin y)^x = 0$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

हल : $(\cos x)^y = (\sin y)^x \Rightarrow y \log \cos x = x \log \sin y$ (लघुगणक लेने पर)

$\Rightarrow \quad f(x, y) = y \log \cos x - x \log \sin y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) - \log \sin y \,.\, 1 = -(y \tan x + \log \sin y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \log \cos x \,.\, 1 - x \cdot \frac{1}{\sin y} \cdot \cos y = \log \cos x - x \cot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = \frac{y \tan x + \log \sin y}{\log \cos x - x \cot y}$$ उत्तर

उदाहरण 13. दिखाइए कि पृष्ठ $x^x \,.\, y^y \,.\, z^z = a$ के उस बिन्दु पर जहाँ $x = y = z$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{x \log ex}$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1999)

हल : $\because \quad x^x y^y z^z = a \quad \Rightarrow \quad x \log x + y \log y + z \log z = \log a$ ...(1)

y को स्थिर मानकर x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x \,.\, 1\right) + 0 + \left(z \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \log z \,.\, 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad (1 + \log x) + (1 + \log z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ...(2)

$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{1 + \log x}{1 + \log z}\right)$

$\because \; x = y = z \; \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{1 + \log x}{1 + \log x}\right) = -1$

इसी प्रकार x को स्थिर मानकर

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{1 + \log y}{1 + \log z}\right)$$ अतः $x = y = z$ पर $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$

(2) का y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$0 + 0 + \left[(1 + \log z)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(0 + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] = 0$$ ...(3)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

समी० (3) में $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ के मान रखने पर,

$$\Rightarrow \quad (1+\log z)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(-1)\left[\frac{1}{z}\times(-1)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad (1+\log z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{z}=0$$

$$(\log e+\log z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{z} \quad \text{या} \quad \log ez\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-1}{z\log ez}=\frac{-1}{x\log ex} \quad (\because z=x)$$ सिद्धम्

नोट : z को आश्रित चर तथा x और y को स्वतन्त्र चर माना गया है ।

उदाहरण 14. यदि $u=\sin^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ तब सिद्ध करो कि

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996, 97, 2009)

हल :
$$u=\sin^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad ...(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2/y^2)}}\times\frac{1}{y}\times 1+\frac{1}{1+(y^2/x^2)}\times y\times\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2/y^2)}}\times x\times\frac{-1}{y^2}+\frac{1}{1+(y^2/x^2)}\times\frac{1}{x}\times 1=\frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\left[\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{y}{x^2+y^2}\right]+y\left[\frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{x}{x^2+y^2}\right]$$

$$=\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$ सिद्धम्

उदाहरण 15. यदि $u=\log(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ का मान ज्ञात करो ।

हल : $u=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2+z^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\times 2x=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)\times 1-x\times(2x+0+0)}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

इसी प्रकार से, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ तथा $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

जोड़ने पर, $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$ उत्तर

उदाहरण 16. यदि $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ तब सिद्ध करो कि $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

हल : $$z=f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{1}{y}\times 1$$

तथा $$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\times x\times\left(\frac{-1}{y^2}\right)=f'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{-x}{y^2}$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x\times\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)-y\times\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)=0$$ सिद्धम्

उदाहरण 17. यदि $x=r\cos\theta$ तथा $y=r\sin\theta$ तो दिखलाओ कि $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1986, 89)

हल : $\because x=r\cos\theta$ ...(1), तथा $y=r\sin\theta$ ...(2), $\therefore x^2+y^2=r^2$ ...(3)

θ को अचर मानते हुए, (1) को r के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta=\cos\theta$ ...(4)

y को अचर रखते हुए, (3) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$2x+0=2r\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y \quad \text{या} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y=\frac{x}{r}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta \quad ...(5)$$

(4) तथा (5) से, $$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$$ सिद्धम्

उदाहरण 18. यदि $u=e^{xyz}$, दिखाओ कि $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)e^{xyz}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2000, 03, 06)

हल : $u=e^{xyz}$ $\therefore \frac{\partial u}{\partial z}=e^{xyz}\cdot xy=(xy)e^{xyz}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xy(e^{xyz}\times xz)+e^{xyz}\times x=(x^2yz+x)e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(x^2yz+x).(e^{xyz}\times yz)+e^{xyz}\times(2xyz+1)$$

$$=(x^2y^2z^2+xyz)e^{xyz}+(2xyz+1).e^{xyz}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)e^{xyz}$$ सिद्धम्

3. समघात फलन (Homogeneous Functions) :

यदि किसी फलन $f(x,y)$ को $x^n.f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में व्यक्त किया जा सके तो वह फलन n घात का समघात फलन है । उदाहरणतः

(i) $$u=\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x^2(1+y^2/x^2)}{x(1+y/x)}=x\cdot\frac{1+(y/x)^2}{1+(y/x)}=x.f(y/x)$$

अतः u, एक घात का समघात फलन है ।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(ii) $u = \dfrac{x^3 + y^3}{x - y} = \dfrac{x^3(1 + y^3/x^3)}{x(1 - y/x)} = x^2 \cdot \dfrac{1 + (y/x)^3}{1 - (y/x)} = x^2 f(y/x)$

अतः u, दो घात का समघात फलन है।

(iii) $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \Rightarrow \sin u = \dfrac{x[1 + (y/x)]}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{y/x})}$

$\Rightarrow \sin u = \sqrt{x} \cdot \dfrac{[1 + (y)x]}{(1 + \sqrt{y/x})} \Rightarrow \sin u = \sqrt{x} \cdot f(y/x)$

अतः फलन $\frac{1}{2}$ घात का समघात फलन है।

4. आयलर का प्रमेय (Euler's Theorem) :

यदि $u = f(x, y)$, x तथा y में n घात का समघात फलन है तो आयलर के प्रमेय के अनुसार, $x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = n \cdot u$

नोट—इस प्रमेय की उत्पत्ति पाठ्यक्रम में नहीं है। लेकिन इसके प्रयोग से प्रश्न सुगमता से हल हो जाते हैं, जैसा कि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है। अतः विद्यार्थीगण आगे के उदाहरणों की सहायता से इसका प्रयोग सीख लें।

उदाहरण 19. यदि $u = \log\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ तो सिद्ध करो कि $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$

हल : $\because \quad u = \log\dfrac{x^2 + y^2}{x + y} \qquad \therefore \quad e^u = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$

जो x तथा y में 1 घात का समघात फलन है। अतः आयलर प्रमेय से,

$$x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^u) + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^u) = 1 \times e^u$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot e^u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot e^u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = e^u$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

इतिसिद्धम्

उदाहरण 20. यदि $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$ तो सिद्ध करो कि $x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

हल : $\because \quad u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}\right) \qquad \therefore \quad \tan u = \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

जोकि x तथा y में 2 घात का समघात फलन है। अतः आयलर प्रमेय से,

$$x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\tan u) + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\tan u) = 2 \times \tan u$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \sec^2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \sec^2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2\tan u$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\tan u}{\sec^2 u} = 2\sin u\cos u = \sin 2u$$

इतिसिद्धम्

5. सम्पूर्ण अवकलन (Total Differentiation) :

(i) यदि $u = f(x, y)$ जहाँ $x = \phi(t)$ तथा $y = \phi(t)$ तब $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

$\dfrac{du}{dt}$ को सम्पूर्ण अवकल गुणांक कहते हैं।

यदि $u = f(x, y, z \ldots)$, जहाँ $x, y, z \ldots$ चर t के फलन हैं, तब $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dt} + \ldots$

(ii) यदि $u = f(x, y)$ तथा y, x का फलन है तब $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ तथा $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dy}$

(iii) अस्पष्ट फलन (Implicit function) $f(x, y) = 0$ में, $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)$ (सूत्र)

6. चरों का परिवर्तन (Change of Variables) :

(i) यदि $u = f(x, y)$ तथा $x = \phi_1(r, \theta)$, $y = \phi_2(r, \theta)$ तब,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

(ii) यदि $u = f(x, y)$ तथा $t_1 = \phi_1(x, y)$, $t_2 = \phi_2(x, y)$ तब,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y}$$

(iii) यदि $u = f(r)$ तथा $r = \phi(x, y)$ तब, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x}$ तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial y}$

उदाहरण 21. यदि $u = x^3y^4 + x^4y^3$, जहाँ $x = t^2$ तथा $y = t^3$ तो $\dfrac{du}{dt}$ ज्ञात करो।

हल : $u = x^3y^4 + x^4y^3 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^4 + 4x^3y^3$ तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4x^3y^3 + 3x^4y^2$

$\because \; x = t^2 \quad \therefore \; \dfrac{dx}{dt} = 2t; \quad \because \; y = t^3 \quad \therefore \; \dfrac{dy}{dt} = 3t^2$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

$$= (3x^2y^4 + 4x^3y^3) \times 2t + (4x^3y^3 + 3x^4y^2) \times 3t^2$$

$$= [3(t^2)^2 \cdot (t^3)^4 + 4(t^2)^3 \cdot (t^3)^3]2t + [4(t^2)^3 \cdot (t^3)^3 + 3(t^2)^4 (t^3)^2]3t^2$$

$$= (3t^{16} + 4t^{15})2t + [4t^{15} + 3t^{14}]3t^2$$

$$= 6t^{17} + 8t^{16} + 12t^{17} + 9t^{16}$$

$$= 18t^{17} + 17t^{16} = t^{16}(18t + 17)$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 22. यदि z, x और y चरों का फलन है तथा u और v दूसरे चर इस तरह से हैं कि $u = lx + my$, $v = ly - mx$ तो दिखाओ कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (l^2 + m^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1990)

हल : हम जानते हैं कि $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot l + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-m) = l\frac{\partial z}{\partial u} - m\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(l \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - m \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= l \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - m \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= l \cdot \frac{\partial}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - m \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= l \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot l - m \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot (-m) \left(\because \frac{\partial u}{\partial x} = l, \frac{\partial v}{\partial x} = -m\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = l^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + m^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad \text{...(1)}$$

इसी प्रकार, $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = m^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + l^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad \text{...(2)}$$

(1) तथा (2) को जोड़ने पर, $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (l^2 + m^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$ सिद्धम्

उदाहरण 23. यदि $u = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ तथा $y = r\sin\theta$ तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1991)

हल : $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{...(1)}$$

$\because \quad x = r\cos\theta \quad \therefore \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$

$\because \quad y = r\sin\theta \quad \therefore \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$

(1) में ये मान रखने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{...(2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \quad \text{...(3)}$$

$\because \quad x = r\cos\theta \quad \therefore \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$

$\because \quad y = r\sin\theta \quad \therefore \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

(3) में ये मान रखने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r\cos\theta = r\left(-\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = r^2\left[\sin^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cos^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \sin^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cos^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{...(4)}$$

(2) तथा (4) को जोड़ने पर,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$ सिद्धम्

उदाहरण 24. यदि $u = f(x - y, y - z, z - x)$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

हल : माना कि $x - y = X$, $y - z = Y$, $z - x = Z$, तब $u = f(X, Y, Z)$

$\because \quad X = x - y \quad \therefore \quad \frac{\partial X}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = 0$

$\because \quad Y = y - z \quad \therefore \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = -1$

$\because \quad Z = z - x \quad \therefore \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y} \times \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Z} \times \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial X} \times 1 + \frac{\partial u}{\partial Y} \times 0 + \frac{\partial u}{\partial Z} \times (-1) = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Z} \quad \text{...(1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X} \times \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Z} \times \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial X} \times (-1) + \frac{\partial u}{\partial Y} \times 1 + \frac{\partial u}{\partial Z} \times 0 = -\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \quad \text{...(2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial X} \times \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial Y} \times \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial Z} \times \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial X} \times 0 + \frac{\partial u}{\partial Y} \times (-1) + \frac{\partial u}{\partial Z} \times 1 = -\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Z} \quad \text{...(3)}$$

(1), (2) तथा (3) को जोड़ने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Z} - \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Z} = 0$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 8

1. $\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात करो, यदि

(i) $u = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ (ii) $u = \log(x^2 - y^2)$

(iii) $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ (iv) $u = (x^2 + y^2)^{1/2}$

(v) $u = \tan^{-1}\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ (vi) $u = x^y + y$

2. यदि $u = x^y$ तो दिखाओ कि $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1992)

3. यदि $z = x^3 + y^3 - 3axy$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996, 2003, 05)

4. दिखाओ कि (i) यदि $z = f(x + y)$; तब $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$

(ii) यदि $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$; तब $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

5. यदि $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ तो $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1985)

6. (i) यदि $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ तो दिखाइये कि $x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

(ii) यदि $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ तो सिद्ध करो कि $x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 3u$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1998)

7. यदि $u(x + y) = x^2 + y^2$ तो सिद्ध करो कि $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

8. यदि $u = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$ तो दिखाओ कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1997, 2009)

9. यदि $z = x\cos y - y\cos x$ तो $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ के मान ज्ञात करो।

10. यदि $u = x^2\tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2\tan^{-1}\frac{x}{y}$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 2002, 04)

11. यदि $u = \log(x^2 + y^2)$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

12. यदि $u = \frac{y}{x} \cdot \log x$ तो दिखाओ कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

13. यदि $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ तो दिखाओ कि $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{-4zy}{(x^2 + y^2 + z^2)}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)

14. यदि $u = \tan^{-1}\frac{xy}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}}$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1998)

15. यदि $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

16. यदि $z = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ तो सिद्ध करो कि $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \tan z$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

17. यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ तो सिद्ध करो कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1998)

18. यदि $u = \tan^{-1}\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ तो सिद्ध करो कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2u$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

19. यदि $z = \log\frac{x^3 + y^3}{x + y}$ तो सिद्ध करो कि $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$

20. यदि $z = \sin^{-1}\left(\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ तो सिद्ध करो कि $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\tan z$

21. यदि $z = \cos^{-1}\left(\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ तो सिद्ध करो कि $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}\cot z$

22. यदि $f = \cos\left(\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ तो सिद्ध करो कि $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$

23. यदि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1$

24. यदि $x = r\cos\theta; y = r\sin\theta$ तो दिखलाओ कि

(i) $r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta}$ (ii) $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$

25. यदि $u = x^2y$ जहाँ $x^2 + xy + y^2 = 1$; $\frac{du}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

26. यदि $y^{\cot x} + (\tan^{-1}x)^y = 1$ तो आंशिक अवकलन विधि से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

27. यदि $x^y + y^x = (x + y)^{x + y}$ तो आंशिक अवकलन विधि से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

28. $\frac{du}{dt}$ ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $u = xy^2 + yx^2$, $x = at^2$; $y = 2at$

(ii) $u = x^5y^4 + y^5x^4$; $x = t^2$, $y = t^3$

29. यदि $u = f(y - x; z - y)$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

30. यदि $u = x^2 + y^2$ तथा $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ तो $\frac{du}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

31. यदि $u = x^y$ तो दिखाइए कि $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

32. यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz)$ तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \frac{3}{x + y + z}$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 08)

33. यदि $z = f(x + ct) + \phi(x - ct)$, सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial^2 z}{dt^2} = C^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

34. यदि $x = r \sin\theta \cos\phi, y = r \sin\theta \sin\phi, z = r\cos\theta$, दिखाइये कि $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$

(उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

35. यदि u, x तथा y के n घात का समघातीय फलन है तो दर्शाइये कि

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)u$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

36. यदि $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

उत्तरमाला 8

1. (i) $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3$ (ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ (iv) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$

(v) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 + 2xy}{(x + y)^2 + (x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x + y)^2 + (x^2 + y^2)^2}$

(vi) $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \log_e y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \log_e x + xy^{x-1}$

5. $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$

9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\cos x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin x - \sin y$

25. $\frac{x(4y^2 + xy - 2x^2)}{x + 2y}$

26. $\frac{y^{\cot x} . \text{cosec}^2 x . \log y - y . (\tan^{-1} x)^{y-1} . [1/(1 + x^2)]}{\cot x . y^{\cot x - 1} + (\tan^{-1} x)^y . \log \tan^{-1} x}$

27. $\frac{yx^{y-1} + y^x \log y - (x + y)^{x+y} \log e(x + y)}{x^y \log x + xy^{x-1} - (x + y)^{x+y} \log e(x + y)}$

28. (i) $u^3(16t^3 + 10t^4)$ (ii) $t^{21}(22 + 23t)$

30. $2x - 3y \cdot \left(\frac{x^2 + y}{y^2 + x}\right)$

9 जैकोबियन (Jacobians)

1. परिभाषा (Definition) :

यदि $u(x, y)$ and $v(x, y)$ स्वतन्त्र चरों x तथा y के दो ऐसे सतत् (continuous) फलन हैं कि $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ भी x तथा y में सतत् हैं, तब सारणिक (determinant), $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$ को x, y के सापेक्ष u, v का जैकोबियन या फलनिक सारणिक (Jacobian or functional determinant) कहते हैं तथा इसे प्राय: $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ या $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$ से निरूपित करते हैं।

इसी प्रकार x, y, z के सापेक्ष u, v, w का जैकोबियन

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

है। इसे $J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right)$ या $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ से निरूपित करते हैं।

2. जैकोबियन का व्यापक रूप (General form of Jacobian) :

यदि $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n स्वतन्त्र चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के फलन हैं तब सारणिक

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

को $u_1, u_2, \ldots, u_n$ का $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के सापेक्ष जैकोबियन कहते हैं। इसे प्राय: $J(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ से या $\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ से निरूपित करते हैं।

3. विशेष प्रस्थति (Particular case) :

यदि $u_1 = f_1(x_1)$, $u_2 = f_2(x_1, x_2)$, $u_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$, ..., $u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ तब

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \times \ldots \times \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उपपत्ति :
$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \frac{\partial u_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$\because$ $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0;$ $\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = \dots = \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = 0$ आदि

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \frac{\partial u_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)$$

4. फलनों के फलन का जैकोबियन या चेन रूल (Jacobians of Functions of functions or Chain Rule) :

यदि u, v, चरों x, y के फलन हैं तथा x, y, चरों r, s के फलन हैं, तब $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}$

उपपत्ति—
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \quad \dots (1)$$

लेकिन $\because u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y), \quad x = \phi_1(r, s), \quad y = \phi_2(r, s)$

$\therefore$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s}$$

ये मान (1) में रखने पर,
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}$$

व्यापक रूप (General Form) : $\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots u_n)} \times \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)}$

5. प्रमेय (Theorem) : $J \times J' = 1$, जहाँ यदि $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ तब $J' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

उपपत्ति : यदि u, v, चरों x, y के फलन हैं तथा x, y स्वतन्त्र चरों u, v के फलन हैं, तब

$$J \times J' = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{(सिद्धम्)}$$

$$\Rightarrow \quad JJ' = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

इसे आगे उदाहरण (3) में भी सत्यापित किया गया है।

व्यापक रूप में (In General Form) : $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)} \times \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = 1$

6. अस्पष्ट फलनों का जैकोबियन (Jacobian of Implicit Functions) :

यदि u, v स्वतन्त्र चरों x, y के अस्पष्ट फलन (Implicit functions) हैं तथा सम्बन्धों

$$f_1(u, v, x, y) = 0 \quad \dots (1) \quad \text{तथा} \quad f_2(u, v, x, y) = 0 \quad \dots (2)$$

द्वारा संयोजित (connected) हैं तब

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = (-1)^2 \cdot \frac{[\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)]}{[\partial(f_1, f_2)/\partial(u, v)]}$$

उपपत्ति (Proof)—सम्बन्धों (1) तथा (2) को x तथा y के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \dots (3)$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (4)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \dots (5)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (6)$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अब
$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\times\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

परिणामों (3), (4), (5), (6) के प्रयोग से,
$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\times\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y}\\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\times\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=(-1)^2\cdot\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)$$
$$\Rightarrow\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=(-1)^2\cdot\frac{[\partial(f_1,f_2)/\partial(x,y)]}{[\partial(f_1,f_2)/\partial(u,v)]}$$
सिद्धम्

इसी प्रकार, यदि u, v, w स्वतन्त्र चरों x, y, z से निम्नलिखित सम्बन्धों से सम्बन्धित हों,
$$f_1(u,v,w,x,y,z)=0,\quad f_2(u,v,w,x,y,z)=0,\quad f_3(u,v,w,x,y,z)=0$$
तब
$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=(-1)^3\cdot\left[\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)/\partial(x,y,z)}{\partial(f_1,f_2,f_3)/\partial(u,v,w)}\right]$$

व्यापक रूप (General form) में,
$$\frac{\partial(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots,x_n)}=(-1)^n\cdot\left[\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots\ldots f_n)/\partial(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)}{\partial(f_1,f_2,\ldots\ldots f_n)/\partial(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)}\right]$$

7. विशेष प्रस्थति (Particular Case) : यदि अस्पष्ट सम्बन्ध निम्न प्रकार से हैं—
$$f_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,u_1)=0$$
$$f_2(x_2,x_3,\ldots,x_n,u_1,u_2)=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x_n,u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n)=0$$
तब,
$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n)}=\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\times\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\times\frac{\partial f_3}{\partial u_3}\times\ldots\times\frac{\partial f_n}{\partial u_n}$$
$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\times\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\times\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\times\ldots\times\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$\frac{\partial(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)}=(-1)^2\times\left[\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\times\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\times\ldots\times\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}{\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\times\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\times\ldots\times\frac{\partial f_n}{\partial u_n}}\right]$$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. $u=a(x^2+y^2)$ तथा $v=b(x^2-y^2)$ तो u तथा v का x, y के सापेक्ष जैकोबियन ज्ञात करो।

हल :
$$u=a(x^2+y^2)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial x}=2ax\;;\quad\frac{\partial u}{\partial y}=2ay$$
$$\Rightarrow\quad v=b(x^2-y^2)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial v}{\partial x}=2bx\;;\quad\frac{\partial v}{\partial y}=-2by$$
$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2ax & 2ay\\ 2bx & -2by\end{vmatrix}=4ab\begin{vmatrix}x & y\\ x & -y\end{vmatrix}=4abxy$$
उत्तर

उदाहरण 2. यदि $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ तो $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ का मान ज्ञात करो।

हल : हमें r, θ का x, y के सापेक्ष जैकोबियन का मान ज्ञात करना है। अतः r तथा θ को x, y के फलन बनाना है।
$$x=r\cos\theta\quad\ldots(1)\qquad\text{तथा}\qquad y=r\sin\theta\quad\ldots(2)$$
(1) तथा (2) को वर्ग कर जोड़ने पर,
$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\quad\Rightarrow\quad r^2=x^2+y^2\quad\ldots(3)$$
(2) को (1) से विभाजित करने पर,
$$\frac{y}{x}=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\frac{y}{x}\quad\Rightarrow\quad\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\quad\ldots(4)$$
$r^2=x^2+y^2$ से, $\quad 2r\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=2x\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$

$r^2=x^2+y^2$ से, $\quad 2r\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=2y\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\frac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta$

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ से, $\quad\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{1+(y^2/x^2)}\times y\times\frac{-1}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-r\sin\theta}{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}=\frac{-\sin\theta}{r}$

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ से, $\quad\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{1+(y^2/x^2)}\times\frac{1}{x}\times 1=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\theta}{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}=\frac{\cos\theta}{r}$

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \frac{-\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r}\end{vmatrix}=\frac{\cos^2\theta}{r}+\frac{\sin^2\theta}{r}=\frac{1}{r}$$
उत्तर

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\times\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ अर्थात् $J\times J'=1$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 08)

हल : $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$ तथा $J'=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \left\{ \begin{aligned} \because\ & \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \\ & \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \\ & \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \\ & \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = 1 \end{aligned} \right.$$

$$= 1$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ अर्थात् $J \times J' = 1$ **उत्तर**

उदाहरण 4. यदि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो सिद्ध करो कि $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \times \dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = 1$

हल : यदि $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = J$ तब $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = J'$ $\because J \times J' = 1 \therefore \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \times \dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = 1$ **सिद्धम्**

अथवा $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \quad \left\{ \begin{aligned} & x = r\cos\theta \text{ से } \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \\ & y = r\sin\theta \text{ से } \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{aligned} \right.$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{vmatrix}$$ (देखो उदाहरण 2)

$$= \frac{\cos^2\theta}{r} + \frac{\sin^2\theta}{r} = \frac{1}{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \times \dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = r \times \dfrac{1}{r} = 1$ **उत्तर**

उदाहरण 5. यदि $u = x^2 + y^2, v = x^2 - y^2$ तथा $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो $J\left(\dfrac{u,v}{r,\theta}\right)$ का मान ज्ञात करो।

हल : $$J\left(\frac{u,v}{r,\theta}\right) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \quad \text{... (1)}$$

$u = x^2 + y^2$ तथा $v = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix}$$

$$= -4xy - 4xy = -8xy$$

$$= -8\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta \qquad (\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

$$= -8r^2\sin\theta\cos\theta = -4r^2\sin 2\theta$$

$x = r\cos\theta$ से, $\quad \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \;;\; \dfrac{\partial r}{\partial \theta} = -r\sin\theta$

$y = r\sin\theta$ से, $\quad \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \;;\; \dfrac{\partial r}{\partial \theta} = r\cos\theta$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

ये मान (1) में रखने पर, $J\left(\dfrac{u,v}{r,\theta}\right) = -4r^2\sin 2\theta \times r = -4r^3\sin 2\theta$ **उत्तर**

उदाहरण 6. यदि $x + y + z = u,\ y + z = uv, z = uvw$ तो $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ का मान ज्ञात करो।

हल : पहले x, y, z के चरों u, v, w के फलन ज्ञात करो।

$\because \quad x + y + z = u \quad \therefore \quad x = u - (y + z) = u - uv = u(1 - v)$

$\because \quad y + z = uv \quad \therefore \quad y = uv - z = uv - uvw = uv(1 - w)$

$z = uvw$

$x = u(1 - v)$ से, $\quad \dfrac{\partial x}{\partial u} = 1 - v \;;\; \dfrac{\partial x}{\partial v} = u(0 - 1) = -u \;;\; \dfrac{\partial x}{\partial w} = 0$

$y = uv(1 - w)$ से, $\quad \dfrac{\partial y}{\partial u} = v(1 - w) \;;\; \dfrac{\partial y}{\partial v} = u(1 - w) \;;\; \dfrac{\partial y}{\partial w} = -uv$

$z = uvw$ से, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = vw \;;\; \dfrac{\partial z}{\partial v} = uw \;;\; \dfrac{\partial z}{\partial w} = uv$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u & 0 \\ v(1 - w) & u(1 - w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - v & -u & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 = R_2 + R_3 \\ R_3 \end{matrix}$$

$$= uv(u - uv + uv) = u^2v$$ **उत्तर**

उदाहरण 7. यदि $y_1 = \dfrac{x_2x_3}{x_1}, y_2 = \dfrac{x_3x_1}{x_2}, y_3 = \dfrac{x_1x_2}{x_3}$ तो $\dfrac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$ का मान ज्ञात करो।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल : ∵ $y_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}$ ∴ $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{-x_2x_3}{x_1^2}$; $\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{x_3}{x_1}$; $\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{x_2}{x_1}$

∵ $y_2 = \frac{x_3x_1}{x_2}$ ∴ $\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{x_3}{x_2}$; $\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{-x_3x_1}{x_2^2}$; $\frac{\partial y_2}{\partial x_3} = \frac{x_1}{x_2}$

∵ $y_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$ ∴ $\frac{\partial y_3}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_3}$; $\frac{\partial y_3}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_3}$; $\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = \frac{-x_1x_2}{x_3^2}$

$$\frac{\partial (y_1, y_2, y_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{x_2x_3}{x_1^2} & \frac{x_3}{x_1} & \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{x_3}{x_2} & -\frac{x_3x_1}{x_2^2} & \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_3} & \frac{x_1}{x_3} & -\frac{x_1x_2}{x_3^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_2x_3}{x_1^2}\left(\frac{x_1^2}{x_2x_3} - \frac{x_1^2}{x_2x_3}\right) - \frac{x_3}{x_1}\left(-\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_1}{x_3}\right) + \frac{x_2}{x_1}\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$= 0 + (1+1) + (1+1) = 4$$

उत्तर

उदाहरण 8. यदि $x = r \sin\theta \cos\phi, y = r \sin\theta \sin\phi, z = r\cos\theta$ तो दिखाइए कि $\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$

(उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

हल : $x = r\sin\theta\cos\phi$ से,

$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi$; $\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi$; $\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi$

$y = r\sin\theta\sin\phi$ से,

$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi$; $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\phi$; $\frac{\partial y}{\partial \phi} = r\sin\theta\cos\phi$

$z = r\cos\theta$ से,

$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta$; $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta$; $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sin\theta\cos\phi\,(0 + r^2\sin^2\theta\cos\phi) - r\cos\theta\cos\phi\,(0 - r\sin\theta\cos\theta\cos\phi)$$
$$- r\sin\theta\sin\phi\,(-r\sin^2\theta\sin\phi - r\cos^2\theta\sin\phi)$$

$$= r^2[\sin^3\theta\cos^2\phi + \sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^3\theta\sin^2\phi + \sin\theta\sin^2\phi\cos^2\theta]$$

$$= r^2[\sin^3\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \sin\theta\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)]$$
$$= r^2[\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta]$$
$$= r^2\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2\sin\theta$$

सिद्धम्

उदाहरण 9. यदि $u_1 = \cos x_1, u_2 = \cos x_1 \cos x_2, u_3 = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3$ तो $\frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)}$ का मान ज्ञात करो।

हल : अनुच्छेद 3 से, $\frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \times \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

$u_1 = \cos x_1$ से, $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\sin x_1$, $u_2 = \cos x_1 \cos x_2$ से, $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\cos x_1 \sin x_2$

$u_3 = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3$ से, $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\cos x_1 \cos x_2 \sin x_3$

$$\therefore \quad \frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = (-\sin x_1) \times (-\cos x_1 \sin x_2) \times (-\cos x_1 \cos x_2 \sin x_3)$$
$$= -\cos^2 x_1 \cos x_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3$$

उत्तर

उदाहरण 10. यदि $y_1 = 1 - x_1, y_2 = x_1(1 - x_2), y_3 = x_1x_2(1 - x_3), \ldots, y_n = x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}(1 - x_n)$ तब सिद्ध करो कि

$$\frac{\partial (y_1, y_2, y_3, \ldots y_n)}{\partial (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)} = (-1)^n x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-1}$$

(उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

हल : $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -1$; $\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -x_1$; $\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = -x_1x_2$; $\frac{\partial y_n}{\partial x_n} = -x_1x_2x_3 \ldots x_n$

अनुच्छेद 9·3 से, $\frac{\partial (y_1, y_2, y_3, \ldots y_n)}{\partial (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)} = \frac{\partial y_1}{\partial x} \times \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \times \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \times \ldots \times \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$

$$= (-1)(-x_1)(-x_1x_2) \ldots (-x_1x_2x_3 \ldots x_n)$$
$$= (-1)^n x_1^{n-1} x_2^{n-2} x_3^{n-3} \ldots x_{n-1}$$

सिद्धम्

उदाहरण 11. यदि $x^2 + y^2 + u^2 - v^2 = 0$ तथा $uv + xy = 0$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{x^2 - y^2}{u^2 + v^2}$

हल : $f_1 \equiv (x^2 + y^2 + u^2 - v^2) = 0$ ... (1) $f_2 \equiv (uv + xy) = 0$ ... (2)

∵ f_1, f_2 अस्पष्ट फलन हैं ∴ $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = (-1)^2 \frac{\partial (f_1, f_2)/\partial (x, y)}{\partial (f_1, f_2)/\partial (u, v)}$ ... (3)

(1) से, $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial f_1}{\partial u} = 2u$, $\frac{\partial f_1}{\partial v} = -2v$

(2) से, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = x$, $\frac{\partial f_2}{\partial u} = v$, $\frac{\partial f_2}{\partial v} = u$

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 - y^2)$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 + v^2)$$

(3) से, $$\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = (-1)^2 \times \frac{2(x^2 - y^2)}{2(u^2 + v^2)} = \frac{x^2 - y^2}{u^2 + v^2}$$ सिद्धम्

उदाहरण 12. यदि $u = x + y - z,\ u \cdot v = x + z,\ u \cdot v \cdot w = y$ तो $\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}$ का मान ज्ञात करो।

हल :

$$f_1 = x + y - z - u \quad \ldots (1)$$
$$f_2 = x + z - u \cdot v \quad \ldots (2)$$
$$f_3 = y - u \cdot v \cdot w \quad \ldots (3)$$

$\because f_1, f_2, f_3$ चरों u, v, w तथा x, y, z के अस्पष्ट फलन हैं

$$\therefore \quad \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = (-1)^3 \cdot \frac{\partial (f_1, f_2, f_3)/\partial (u, v, w)}{\partial (f_1, f_2, f_3)/\partial (x, y, z)} \quad \ldots (4)$$

(1), (2) तथा (3) से,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = -1;\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1;\ \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -1,\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0;\ \frac{\partial f_2}{\partial u} = -v,\ \frac{\partial f_2}{\partial v} = -u,\ \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0;\ \frac{\partial f_3}{\partial u} = -vw,\ \frac{\partial f_3}{\partial v} = -uw,\ \frac{\partial f_3}{\partial w} = -uv$$

$$= \frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -v & -u & 0 \\ -vw & -uw & -uv \end{vmatrix} = -u^2 v$$

(4) से, $$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = (-1)^3 \times \frac{-u^2 v}{-2} = \frac{-u^2 v}{2}$$ उत्तर

उदाहरण 13. यदि समीकरण $(\lambda - x)^3 + (\lambda - y)^3 + (\lambda - z)^3 = 0$ के मूल u, v, w हों तो $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)}$ का मान ज्ञात करो।

हल : दी हुई समीकरण $3\lambda^3 - 3\lambda^2 (x + y + z) + 3\lambda (x^2 + y^2 + z^2) - (x^3 + y^3 + z^3) = 0$ है।

$\because$ u, v, w इसके मूल हैं $\therefore u + v + w = x + y + z$; $uv + vw + uw = x^2 + y^2 + z^2$

$$uvw = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$$

u, v, w चरों x, y, z के साथ निम्न प्रकार से सम्बन्धित हैं—

$$f_1 \equiv u + v + w - x - y - z = 0 \quad \ldots (1)$$
$$f_2 \equiv uv + vw + uw - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad \ldots (2)$$
$$f_3 \equiv uvw - \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) = 0 \quad \ldots (3)$$

$\because f_1, f_2, f_3$ अस्पष्ट फलन हैं

$$\therefore \quad \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = (-1)^3 \cdot \frac{\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x, y, z)}}{\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (u, v, w)}} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

अब (1), (2), (3) को आंशिक अवकलित कर $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \ldots$ इत्यादि के मान ज्ञात करो और उन मानों को सारणिकों में रखने पर,

$$\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2x & -2y & -2z \\ -x^2 & -y^2 & -z^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v + w & w + u & u + v \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}$$

$$= -[(x - y)(y - z)(z - x)] \div [(u - v)(v - w)(w - u)]$$

$$= - \frac{(x - y)(y - z)(z - x)}{(u - v)(v - w)(w - u)}$$ उत्तर

8. अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकल गुणांक ज्ञात करना

(To Find Partial Derivatives from Implicit Functions) :

यदि u, v स्वतन्त्र चरों x, y के अस्पष्ट फलन हैं और निम्न प्रकार से सम्बन्धित हैं

$$f_1 (u, v, x, y) = 0$$

तथा $$f_2 (u, v, x, y) = 0$$

तब आंशिक अवकल गुणांक $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ निम्न सूत्रों से ज्ञात किए जा सकते हैं :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, v)}}{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, x)}}{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, v)}}$$ (सूत्र)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y, v)}}{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, y)}}{\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, v)}}$$ (सूत्र)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 14. यदि $u^2 + xv^2 = x + y, v^2 + yu^2 = x - y$ तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial v}{\partial y}$ ज्ञात करो।

हल :

$$f_1(u, v, x, y) = u^2 + xv^2 - x - y = 0 \quad \dots (1)$$

$$f_2(u, v, x, y) = v^2 + yu^2 - x + y = 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}} \text{ तथा } \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = v^2 - 1, \frac{\partial f_1}{\partial v} = 2vx, \frac{\partial f_1}{\partial u} = 2u, \frac{\partial f_2}{\partial x} = -1, \frac{\partial f_2}{\partial v} = 2v, \frac{\partial f_2}{\partial u} = 2uy, \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1, \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v^2 - 1 & 2vx \\ -1 & 2v \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2u & 2vx \\ 2uy & 2v \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(2v^3 - 2v + 2vx)}{(4uv - 4uvxy)} = \frac{-v(v^2 - 1 + x)}{2uv(1 - xy)} \quad \text{उत्तर}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 2uy & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2u & 2vx \\ 2uy & 2v \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2u + 2uy}{4uv - 4uvxy} = -\frac{2u(1 + y)}{4uv(1 - xy)} = \frac{-(1 + y)}{2v(1 - xy)} \quad \text{उत्तर}$$

9. फलनों का फलनीय सम्बन्ध (Functional Relation of Two or More Functions) :

दो या दो से अधिक फलन, स्वतन्त्र हैं या नहीं, यह जैकोबियन के प्रयोग से ज्ञात किया जा सकता है। दो फलन $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ परतन्त्र (functionally dependent) हैं यदि वे परस्पर एक दूसरे के फलन हैं और उनमें $f(u, v) = 0$ प्रकार का सम्बन्ध है।

$f(u, v) = 0$ को x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर,

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

तथा

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ये समघात समीकरणें हैं अतः इनका हल केवल तब अशून्य (non-trivial) होगा, यदि

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \text{ अर्थात् } \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$$

अतः फलन $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ फलनीय परतन्त्र (functional dependent) हैं यदि फलनों में फलनीय सम्बन्ध (functional relation) हैं और उनका जैकोबियन शून्य है।

$$\Rightarrow \text{ यदि } \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0 \text{ अर्थात् } \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरण 15. दिखाओ कि फलन $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + xy = 0$ तथा $f_2(x, y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = 0$ फलनीय स्वतन्त्र नहीं हैं। फलनों f_1 तथा f_2 में सम्बन्ध भी ज्ञात करो।

हल : $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + xy = 0, \ f_2(x, y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = 0$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x + y & 2y + x \\ 4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 2y^3 & 2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 4y^3 \end{vmatrix}$$

$$= (4x^4 + 14x^3y + 18x^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4) - (4x^4 + 14x^3y + 18x^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4)$$

$$= 0$$

$\therefore f_1, f_2$ फलनीय परतन्त्र (functionally dependent) हैं और इनके मध्य फलनीय सम्बन्ध हैं जो निम्न है—

$$f_1^2 = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$$

$$f_2 = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$$

घटाने पर, $\quad f_1^2 - f_2 = 0 \Rightarrow f_2 = f_1^2$ अभीष्ट सम्बन्ध है।

उदाहरण 16. दिखाओ कि फलन u, v, w फलनीय परतन्त्र हैं जहाँ

$u = 3x + 2y - z, \quad v = x - 2y + z, \quad w = x(x + 2y - z)$

इन फलनों में सम्बन्ध भी स्थापित कीजिए।

हल : $\frac{\partial u}{\partial x} = 3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2; \frac{\partial u}{\partial z} = -1; \frac{\partial v}{\partial x} = 1; \frac{\partial v}{\partial y} = -2; \frac{\partial v}{\partial z} = 1; \frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2y - z; \frac{\partial w}{\partial y} = 2x; \frac{\partial w}{\partial z} = -x$

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2x + 2y - z & 2x & -x \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2x + 2y - z & x & x \end{vmatrix} = -2 \times 0 = 0 \quad (\because C_2 = C_3)$$

$\because \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0, \ \therefore$ फलन u, v, w फलनीय स्वतन्त्र नहीं हैं। अतः फलनों u, v, w में फलनीय सम्बन्ध है।

$u = 3x + 2y - z, \ v = x - 2y + z, \ w = x + 2y - z$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$\therefore \quad u + v = 4x$ तथा $u - v = 2x + 4y - 2z$

$$(u + v)(u - v) = 4x(2x + 4y - 2z)$$

$\Rightarrow \quad u^2 - v^2 = 8x(x + 2y - z) = 8w$

$\Rightarrow \quad u^2 - v^2 = 8w$ अभीष्ट सम्बन्ध है।

सारांश (Summary) : **याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)**

1. **जैकोबियन :** यदि $u(x,y)$ तथा $v(x,y)$ स्वतन्त्र चरों के सतत फलन हैं, तब x, y के सापेक्ष (u, v) जैकोबियन

$$J\frac{(u,v)}{x,y} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}; \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

2. x, y, z के सापेक्ष u, v, w का जैकोबियन, $J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,v,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$

3. **फलनों के फलन का जैकोबियन :** यदि u, v चरों x, y के फलन हैं तथा x, y चरों r, s के फलन हैं तब

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$$

4. **प्रमेय :** $JJ' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1; \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \times \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = 1$

5. **अस्पष्ट फलनों का जैकोबियन :** यदि u, v स्वतन्त्र चरों x, y के फलन हैं और सम्बन्धों $f_1(u, v, x, y) = 0$ तथा $f_2(u, v, x, y) = 0$ द्वारा संयोजित (connected) हैं तब

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = (-1)^2 \cdot \frac{[\partial((f_1, f_2)/\partial(x,y))]}{[\partial(f_1, f_2)/\partial(u,v)]}$$

इसी प्रकार, $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = (-1)^3 \frac{[\partial(f_1, f_2, f_3)/\partial(x,y,z)]}{[\partial(f_1, f_2, f_3)/\partial(u,v,w)]}$

6. **अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकल गुणांक :** यदि u, v स्वतन्त्र चरों x, y के अस्पष्ट फलन हैं और $f_1(u, v, x, y) = 0$ तथा $f_2(u, v, x, y) = 0$ तब,

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\partial(f_1, f_2/\partial(x,v))}{\partial(f_1, f_2)/\partial(u,v)} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(f_1, f_2)/\partial(y,v)}{\partial(f_1, f_2)/\partial(u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}; \; -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(f_1, f_2)/\partial(u,x)}{\partial(f_1, f_2)/\partial(u,v)}; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(f_1, f_2)/\partial(u,y)}{\partial(f_1, f_2)/\partial(u,v)}$

अभ्यासमाला 9

1. यदि $u = (ax^2 + by^2)$ तथा $v = (ax^2 - by^2)$ तब $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ का मान ज्ञात करो।

2. यदि $x = u^2 + uv + v^2, y = u^2 - uv - v^2$ तो $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ का मान ज्ञात करो।

3. यदि $u = a\cosh x \cos y, v = a \sinh x \sin y$, सिद्ध करो कि $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{a^2}{2}(\cosh 2x - \cos 2y)$

4. यदि $u = 4x + 3y + 2z, v = 2x - 4y + 3z, w = x + y + z$ तो $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ का मान ज्ञात करो।

5. यदि $u = xyz, v = xy + yz + zx, w = x + y + z$, दिखाइये कि $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = (x - y)(y - z)(z - x)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

6. यदि $u_1 = x + y + z + t, u_2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, u_3 = x^3 + y^3 + z^3 + t^2$ तथा $u_4 = xyz + yzt + zxt + xyt$ तो $\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(x,y,z,t)}$ का मान ज्ञात करो।

7. यदि $x = u(1 + v)$ तथा $y = v(1 + u)$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

8. यदि $x = \frac{u - v}{u + v}$, $y = \frac{u + v}{u - v}$ तो जैकोबियन $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ का मान ज्ञात करो।

9. यदि $u = xyz, v = x^2 + y^2 + z^2$ तथा $w = x + y + z$ तो $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

10. यदि $u = \frac{1}{x}, v = \frac{x^2}{y}$ तथा $w = x + y + z$ तो $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ का मान ज्ञात करो।

11. यदि $x = v^2 + w^2, y = w^2 + u^2, z = u^2 + v^2$, सिद्ध करो $J \times J' = 1$ जहाँ J चरों x, y, z के स्वतन्त्र चरों u, v, w का जैकोबियन है।

12. $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ रूपान्तरण के लिए दिखाओ कि $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = e^{-2u}$

13. यदि $x = r\cos\theta\cos\phi, y = r\cos\theta\sin\phi, z = r\sin\theta$ तो सिद्ध करो कि $J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\phi}\right) = -r^2\cos\theta$

14. यदि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो $J\left(\frac{r,\theta}{x,y}\right)$ का मान ज्ञात करो।

15. यदि $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ तथा $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो $J\frac{\partial(u,\theta)}{\partial(r,\theta)}$ तथा $J\left(\frac{r,\theta}{u,v}\right)$ के मान ज्ञात करो।

संकेत : $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ तथा $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ के मान ज्ञात करो तब $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ तथा $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\partial(u,v)/\partial(r,\theta)}$ के मान ज्ञात करो।

16. यदि $u = x + y, v = x - y$ तथा $x = r^2\cos 2\theta, y = r^2\sin 2\theta$ तो $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$ का मान ज्ञात करो।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

17. यदि $u = r \sin x \cos y, v = r \sin x \sin y$ तथा $w = r \cos x$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = r^2 \sin x$

संकेत : देखो उदाहरण 8 । (उ० प्र० डिप्लोमा 2000, 05)

18. सिद्ध करो $\frac{\partial (r, \theta)}{\partial (x, y)} \times \frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = 1$ (संकेत : देखो उदाहरण 3) (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)

19. जैकोबियन ज्ञात करो यदि $u = \cos x, \; v = \sin x \cos y, \; w = \sin x \sin y \cos z$

संकेत : $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{\partial w}{\partial z}$ का प्रयोग करो ।

20. यदि $u^3 + v^3 + w^3 = x + y + z, \; u^2 + v^2 + w^2 = x^3 + y^3 + z^3$ तथा $u + v + w = x^2 + y^2 + z^2$ तो $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)}$ का मान ज्ञात करो ।

संकेत : $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = (-1)^3 \cdot \frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x, y, z)} \times \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (f_1, f_2, f_3)}$ का प्रयोग करो ।

21. यदि $x + y + z = u, y + z = uv$ तथा $z = uvw$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = u^2 v$

संकेत : $\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = (-1)^3 \frac{\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (u, v, w)}}{\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x, y, z)}} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial u} \times \frac{\partial f_2}{\partial v} \times \frac{\partial f_3}{\partial w}}{\frac{\partial f_1}{\partial x} \times \frac{\partial f_2}{\partial y} \times \frac{\partial f_3}{\partial z}}$ जहाँ $f_1 = x + y + z - u = 0$

$f_2 = y + z - uv = 0, f_3 = z - uvw = 0 \Rightarrow \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = \frac{(-1)(-u)(-uv)}{1 \times 1 \times 1} = u^2 v$

22. यदि $x + y = u^3 + v^3$ तथा $x^3 + y^3 = u^2 + v^2$ तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{x^2 - y^2}{2uv (v - u)}$

संकेत : $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = (-1)^2 \frac{\partial (f_1, f_2)/\partial (x, y)}{\partial (f_1, f_2)/\partial (u, v)}$ का प्रयोग करो, जहाँ $f_1 = u^3 + v^3 - x - y = 0$, $f_2 = u^2 + v^2 - x^3 - y^3 = 0$

23. यदि $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_3}{x_3}$, सिद्ध करो कि $J(u_1, u_2, u_3) = 4$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

24. यदि $u_1 = x_1, \; u_1 u_2 = x_1 + x_2, \; u_1 u_2 u_3 = x_1 + x_2 + x_3, \; u_1 u_2 u_3 u_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ तो $\frac{\partial (u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial (x_1, x_2, x_3, x_4)}$ का मान ज्ञात करो ।

संकेत : $\frac{\partial (u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial (x_1, x_2, x_3, x_4)} = (-1)^4 \cdot \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \times \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \times \frac{\partial f_4}{\partial x_4}}{\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \times \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \times \frac{\partial f_4}{\partial u_4}} = \frac{(-1)(-1)(-1)(-1)}{1 \times u_1 \times u_1 u_2 \times u_1 u_2 u_3} = \frac{1}{u_1^3 u_2^2 u_3}$ उत्तर

25. $u = x + y + z, v = x^2 + y^2 + z^2, \; w = xy + yz + xz$ तो ज्ञात करो कि फलन u, v, w चरों x, y, z के फलनीय आश्रित हैं या नहीं । यदि हैं तो उनके मध्य सम्बन्ध ज्ञात करो ।

26. क्या $u = \frac{x - y}{x + z}, v = \frac{x + z}{y + z}$ फलीय परतन्त्र फलन हैं ? यदि ऐसा है तो उनमें फलनीय सम्बन्ध स्थापित करो ।

27. यदि $u = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y$ तथा $v = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$ तो दिखाओ कि फलन u, v फलीय परतन्त्र हैं और उनमें $v = \sin 2u$ का सम्बन्ध है ।

28. दिखाओ कि फलन $u = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ तथा $v = \frac{x + y}{1 - xy}$ फलनीय स्वतन्त्र नहीं है । उनके बीच सम्बन्ध स्थापित करो ।

उत्तरमाला 9

1. $-8abxy$ 2. $-4u(u + 2v)$ 4. -1 6. 0

7. $1 + u + v$ 8. 0 9. $\frac{-1}{2(x - y)(y - z)(z - x)}$

10. $\frac{1}{y^2}$ 14. $\frac{1}{r}$ 15. $4r^3, \frac{1}{4r^3}$ 16. $-8r^3$

19. $-\sin^3 x \sin^2 y \sin z$ 20. $\frac{(x - y)(y - z)(z - x)}{(u - v)(v - w)(w - x)}$ 25. है; $u^2 = v + 2w$

26. है; $v(1 - u) = 1$ 28. $v = \tan u$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

10

सदिशों का अवकलन
(Differentiation of Vectors)

1. **सदिश फलन (Vector Functions) :** माना कि $f(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$

जहाँ $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ अदिश चर t के तीन अदिश फलन (scalar functions) हैं तथा फलन $f(t)$ सदिश फलन (Vector function) है। इसे $f = (f_1, f_2, f_3)$ से भी निरूपित करते हैं। अत: सदिश फलन को हम निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं।
यदि किसी अन्तराल (t_0, t_1) में अदिश चर t के प्रत्येक मान के संगत एक अद्वितीय (unique) सदिश r किसी नियम के द्वारा निर्धारित होता है तो r को अदिश चर t का सदिश फलन कहते हैं। इसे $r = f(t)$ से निरूपित करते हैं, जहाँ f परतन्त्रता नियम (law of independance) को सूचित करता है, इस प्रकार निम्नलिखित फलन, अदिश चर t के सदिश फलन हैं।

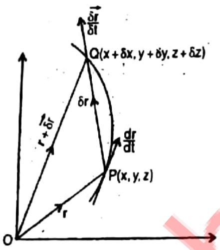
$$r = 5t^2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + 4(2t-1)\,\mathbf{k}$$
$$r = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j} + c\sin 2t\,\mathbf{k}$$
$$r = \log(1+2t)\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - \sin t\,\mathbf{k}$$

अदिश फलनों की भाँति सदिश फलनों का सीमा मान (limit value), फलनों का अवकलन, फलनों की सतता तथा अवकलनीयता (continuity and differentiability), वक्रों के सदिश समीकरण (vector equations) आदि ज्ञात कर सकते हैं।

2. **सदिश फलन का ज्यामितीय निरूपण**
(Geometrical Representation of a Vector Function) :

माना कि कोई कण एक वक्र के अनुदिश गतिमान है और किसी क्षण उसकी वक्र पर स्थिति $P(x, y, z)$ है तथा मूल बिन्दु O के सापेक्ष P की स्थिति सदिश (position vector) r है अर्थात् $\vec{OP} = r$

जब कुछ समय $(t + \delta t)$ पश्चात् कण $Q(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ पर पहुँचता है तो उसका स्थिति सदिश $(r + \delta r)$ हो जाता है अर्थात् $\vec{OQ} = r + \delta r$ । इस प्रकार जैसे-जैसे कण गति करता है उसकी स्थिति सदिश में परिवर्तन होता रहता है।



चित्र 10.1

अत:
1. r, समय t का सदिश फलन है। इसी प्रकार वेग, त्वरण आदि को भी समय t के सदिश फलनों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
2. जब $\delta t \to 0$, बिन्दु $Q \to P$ अर्थात् बिन्दु Q, बिन्दु P पर सम्पाती (coincident) हो जाएगा और जीवा PQ, बिन्दु P पर स्पर्श रेखा के सम्पाती हो जाएगी और $\delta t \to 0$ पर $\frac{\delta r}{\delta t} = \frac{dr}{dt}$ हो जाएगा जोकि r का t के सापेक्ष अवकल गुणांक है। अत:

$$\underset{\delta t \to 0}{Lt}\left(\frac{\delta r}{\delta t}\right) = \frac{dr}{dt} = r \text{ का } t \text{ के सापेक्ष अवकल गुणांक}$$

3. किसी वक्र के समीकरण को वक्र पर स्थित किसी बिन्दु के स्थिति सदिश r, जोकि अदिश चर t का फलन है, के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं। जैसे :
दीर्घवृत्त का प्राचल t के पदों में अदिश समीकरण (scalar equation), $x = a\cos t, y = b\sin t$ होता है।
$r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ में $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = 0$ रखने पर, $r = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$, दीर्घवृत्त का सदिश समीकरण (vector equation) है।

3. **सदिश फलन का अवकलन तथा अवकलन के नियम एवं गुण (Differentiation of a Vector Function):**
यदि सदिश फलन r, किसी अदिश चर t का सतत् (continuous) तथा एक मानी (single valued) फलन है, अर्थात् $r = f(t)$, तब $\underset{\delta t \to 0}{Lt}\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$ को सदिश फलन r का t के सापेक्ष अवकल गुणांक या अवकलज कहते हैं और इसे $\frac{dr}{dt}$ या $\frac{df}{dt}$ या $f'(t)$ से निरूपित करते हैं।

1. उपरोक्त परिभाषा के अनुसार अवकलन में वही सूत्र प्रयोग होते हैं, जो अदिश फलनों के अवकलनों में प्रयोग होते हैं।
2. सदिश फलनों के अवकल गुणांक भी सदिश फलन होते हैं।
3. $r = f(t)$ का $t = t_1$ पर अवकल गुणांक, $\underset{h \to 0}{Lt}\frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$ है। इसे $f'(t_1)$ या $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t = t_1}$ से प्रदर्शित करते है।
4. $f'(t_1)$ को इस प्रकार से भी लिख सकते हैं $f'(t_1) = \underset{t \to t_1}{Lt}\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$
5. यदि सदिश फलन की परिभाषा के प्रक्षेत्र (domain) के प्रत्येक मान के लिए फलन के अवकल गुणांक का अस्तित्व (existence) है तब वह सदिश फलन अपने प्रक्षेत्र में अवकलनीय (differentiable) होता है।
6. यदि t में वृद्धि δt तथा $f(t)$ में वृद्धि δf हो तो $f'(t) = \frac{df}{dt} = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\frac{\delta f}{\delta t}$

7 (i). यदि $r = f(t)$, अदिश चर t के सापेक्ष सदिश फलन है तब $f'(t) = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$

यह सदिश फलन $f(t)$ का प्रथम अवकल गुणांक (first derivative) है।

(ii). यदि $f'(t)$ पुन: अवकलनीय है, तब द्वितीय अवकल गुणांक,

$$f''(t) = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\frac{f'(t+\delta t) - f'(t)}{\delta t} \quad \text{अथवा} \quad f'(t) = \frac{d}{dt}(f't)$$

इसी प्रकार, $\frac{d^3 f}{dt^3}, \frac{d^4 f}{dt^4}, \ldots, \frac{d^n f}{dt^n}$ अर्थात् तीसरे, चौथे,… nवें अवकल गुणांक प्राप्त किए जा सकते हैं।

8. यदि A, B, C अदिश चर t के सदिश फलन हैं तब

(i) $\frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt}$ (ii) $\frac{d}{dt}(u \cdot A) = u \cdot \frac{dA}{dt} + A \cdot \frac{du}{dt}$, जहाँ u, t का अदिश फलन है।

(iii) दो सदिशों के अदिश गुणन (scalar product) का अवकलन : $\frac{d}{dt}(A \cdot B) = A \cdot \frac{dB}{dt} + B \cdot \frac{dA}{dt}$

(iv) दो सदिशों के सदिश गुणन (vector product) का अवकलन : $\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$

'×' का चिह्न सदिश गुणन को निरूपित करता है।

(v) तीन सदिशों के अदिश गुणन (scalar triple product) का अवकलन :

$$\frac{d}{dt}[A \cdot (B \times C)] = \frac{dA}{dt} \cdot (B \times C) + A \cdot \frac{d}{dt}(B \times C)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[A \cdot (B \times C)] = \frac{dA}{dt} \cdot (B \times C) + A \cdot \left(B \times \frac{dC}{dt} + \frac{dB}{dt} \times C\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[A \cdot (B \times C)] = \frac{dA}{dt} \cdot (B \times C) + A \cdot \left(B \times \frac{dC}{dt}\right) + A \cdot \left(\frac{dB}{dt} \times C\right)$$

www.polytechnickhabar.in
Scanned by CamScanner

(vi) **तीन सदिशों के सदिश गुणन (vector triple product) का अवकलन**

$$\frac{d}{dt}(A \times B \times C) = \frac{dA}{dt} \times (B \times C) + A \times \frac{d}{dt}(B \times C)$$

$$\frac{d}{dt}(A \times B \times C) = \frac{dA}{dt} \times (B \times C) + A \times \left(\frac{dB}{dt} \times C + B \times \frac{dC}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(A \times B \times C) = \frac{dA}{dt} \times (B \times C) + A \times \left(\frac{dB}{dt} \times C\right) + A \times \left(B \times \frac{dC}{dt}\right)$$

(vii) यदि $A(t) = A_1(t)\,\mathbf{i} + A_2(t)\,\mathbf{j} + A_3(t)\,\mathbf{k}$, जहाँ $A_1(t),\ A_2(t),\ A_3(t)$ सदिश $A(t)$ के घटक हैं।

तब, $$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$$

(viii) यदि $f(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$, तब $\frac{df}{dt} = \frac{df_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{df_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{df_3}{dt}\mathbf{k}$

जहाँ $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ अदिश चर t के अदिश फलन (scalar functions) हैं।

(ix) यदि $r = f(t)$, अदिश चर t का अवकलनीय सदिश फलन है और t किसी दूसरे चर u का फलन है तब

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \times \frac{du}{dt}$$

(x) यदि $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, किसी समय t पर एक गतिमान कण का स्थिति सदिश (position vector) है तब कण का वेग सदिश (velocity vector) तथा कण का त्वरण सदिश (acceleration vector), क्रमशः

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \text{ हैं।}$$

जहाँ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ अक्षों की दिशाओं में कण के वेग के घटक हैं तथा $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ कण के त्वरण के घटक हैं।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $r = 4\cos^2 t\,.\,\mathbf{i} + 6\sin 3t\,.\,\mathbf{j} + 9\log(t+1)\,\mathbf{k}$ तो (i) $\frac{dr}{dt}$ (ii) $\left|\frac{dr}{dt}\right|$ (iii) $\frac{d_2 r}{dt^2}$ (iv) $\left|\frac{d_2 r}{dt^2}\right|$ के मान ज्ञात करो जब $t = 0$

हल: $r = 4\cos^2 t\,\mathbf{i} + 6\sin 3t\,\mathbf{j} + 9\log(t+1)\,\mathbf{k}$

(i) $$\frac{dr}{dt} = -8\cos t\sin t\,\mathbf{i} + 18\cos 3t\,\mathbf{j} + \frac{9}{t+1}\mathbf{k} = -4\sin 2t\,\mathbf{i} + 18\cos 3t\,\mathbf{j} + \frac{9}{t+1}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} = 0\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 9\mathbf{k} = 9(2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$ उत्तर

(ii) $$\left|\frac{dr}{dt}\right| = 9 \times \sqrt{2^2 + 1^2} = 9\sqrt{5}$$ उत्तर

(iii) $$\frac{d^2r}{dt^2} = -8\cos 2t\,\mathbf{i} - 54\sin 3t\,\mathbf{j} - \frac{9}{(t+1)^2}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_{t=0} = (-8 \times 1)\,\mathbf{i} - (54 \times 0)\,\mathbf{j} - \frac{9}{(0+1)^2}\mathbf{k} = -8\mathbf{i} - 9\mathbf{k}$$ उत्तर

(iv) $$\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $r = ae^{pt} + be^{-pt}$, जहाँ a तथा b अचर सदिश हैं तो सिद्ध करो कि $\frac{d^2r}{dt^2} - p^2r = 0$

हल: $r = ae^{pt} + be^{-pt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = pae^{pt} - pbe^{-pt}$

$$\Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = p^2ae^{pt} + p^2be^{-pt} = p^2(ae^{pt} + be^{-pt}) = p^2r \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} - p^2r = 0$$ सिद्धम्

उदाहरण 3. यदि $u = 5(t+1)\,\mathbf{i} - (3t+u)\,\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ तथा $v = 4(t-1)\,\mathbf{i} + (2t-7)\,\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$ तो $\frac{d}{dt}(u \cdot v)$ का मान ज्ञात करो, जब $t = 0$

हल: $$\frac{d}{dt}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} \quad \text{...(1)}$$

$\because$ $u = 5(t+1)\,\mathbf{i} - (3t+u)\,\mathbf{j} + 3t\mathbf{k} \quad \therefore \frac{du}{dt} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\therefore$ $v = 4(t-1)\,\mathbf{i} + (2t-7)\,\mathbf{j} - 6t\mathbf{k} \quad \therefore \frac{dv}{dt} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

(1) में ये मान रखने पर,

$$\frac{d}{dt}(u \cdot v) = [5(t+1)\,\mathbf{i} - (3t+4)\,\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}] \cdot (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + [4(t-1)\,\mathbf{i} + (2t-7)\,\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}] \cdot (5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

$$\frac{d}{dt}(u \cdot v) = 20(t+1) - 2(3t+4) - 18t + 20(t-1) - 3(2t-7) - 18t$$

$t = 0$ रखने पर, $\frac{d}{dt}(u \cdot v) = 20 - 8 - 0 - 20 + 21 - 0 = 13$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $\frac{dA}{dt} = C \times A$ तथा $\frac{dB}{dt} = C \times B$, सिद्ध करो कि $\frac{d}{dt}(A \times B) = C \times (A \times B)$

हल: $$\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt} = (C \times A) \times B + A \times (C \times B)$$
$$= [(B \cdot C)A - (B \cdot A)C] + [(A \cdot B)C - (A \cdot C)B]$$
$$= (B \cdot C)A - (A \cdot C)B = C \times (A \times B)$$

उदाहरण 5. यदि r, अदिश राशि t का सदिश फलन है तथा a एक अचर सदिश है तब t के सापेक्ष निम्न अवकलन गुणांक ज्ञात करो–

(i) $r \cdot r$ (ii) $r \times r$ (iii) $r \cdot \dot{r}$ (iv) $r \times a$

हल: (i) $$\frac{d}{dt}(r \cdot r) = \frac{dr}{dt} \cdot r + r \cdot \frac{dr}{dt} = \dot{r} \cdot r + r \cdot \dot{r} = r \cdot \dot{r} + r \cdot \dot{r} = 2r \cdot \dot{r}$$

(ii) $$\frac{d}{dt}(r \times r) = \frac{dr}{dt} \times r + r \times \frac{dr}{dt} = \dot{r} \times r + r \times \dot{r} = \dot{r} \times r - \dot{r} \times r = 0$$

(iii) $$\frac{d}{dt}(r \times \dot{r}) = \frac{dr}{dt} \times \dot{r} + r \times \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{r} \times r + r \times \ddot{r} = r \times r\ (\because \dot{r} \times \dot{r} = 0)$$

(iv) $$\frac{d}{dt}(r \times a) = \frac{dr}{dt} \times a + r \times \frac{da}{dt} = \frac{dr}{dt} \times a + 0 \quad \left(\because \frac{da}{dt} = 0\right)$$
$$= \frac{dr}{dt} \times a$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 6. यदि r, अदिश चर t का फलन है तथा a एक अचर सदिश है तो t के सापेक्ष $\frac{r \times a}{r \cdot a}$ का मान ज्ञात करो।

हल :
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{r \times a}{r \cdot a}\right] = \frac{(r\cdot a)\frac{d}{dt}(r \times a) - (r \times a)\frac{d}{dt}(r \cdot a)}{[r\cdot a]^2}$$
$$= \frac{(r\cdot a)\left[\frac{dr}{dt} \times a + r \times \frac{da}{dt}\right] - (r \times a)\left[\frac{dr}{dt}\cdot a + r \cdot \frac{da}{dt}\right]}{[r\cdot a]^2}$$
$$= \frac{(r\cdot a)\left[\frac{dr}{dt} \times a + 0\right] - (r \times a)\left[\frac{dr}{dt}\cdot a + 0\right]}{(r\cdot a)^2} \qquad \left(\because \frac{da}{dt} = 0\right)$$
$$= \frac{(r\cdot a)\left(\frac{dr}{dt} \times a\right) - (r \times a)\left(\frac{dr}{dt}\cdot a\right)}{(r\cdot a)^2}$$
उत्तर

उदाहरण 7. यदि $\hat{r}$, सदिश r की दिशा में इकाई सदिश है तो सिद्ध कीजिए कि $\hat{r} \times d\hat{r} = \frac{r \times dr}{r^2}$

हल : $\because$ $d\hat{r} = \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{r}\right)$, जहाँ r, सदिश r का मापांक है अर्थात् $r = |r| = \frac{r\cdot dr - r\cdot dr}{r^2} = \frac{1}{r}\cdot dr - \frac{r}{r^2}dr$

दोनों ओर सदिशतः (vectorially) $\hat{r}$ से गुणा करने पर,
$$\hat{r} \times d\hat{r} = \hat{r} \times \left(\frac{1}{r}dr - \frac{r}{r^2}dr\right)$$
$$\Rightarrow \quad \hat{r} \times dr = \frac{r}{r} \times \left(\frac{dr}{r} - \frac{rdr}{r^2}\right) = \frac{r \times dr}{r^2} - \frac{r \times r}{r^3}dr$$
$$\Rightarrow \quad \hat{r} \times dr = \frac{r \times dr}{r^2} - 0 \Rightarrow \hat{r} \times dr = \frac{r \times dr}{r^2}$$
(सिद्धम्)

उदाहरण 8. एक कण एक वक्र पर गतिमान है जिसका प्राचल समीकरण $x = 4t^2 - 3t + 1,\ y = t^2 + 1,\ z = t^3$, जहाँ t समय है। समय $t = 2$ पर कण का वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल : $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (4t^2 - 3t + 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

वेग सदिश $v = \frac{dr}{dt} = (8t - 3)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$

त्वरण सदिश $a = \frac{d^2r}{dt^2} = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$

$t = 2$ रखने पर, $v = 13\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k},\ a = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ उत्तर

उदाहरण 9. वक्र $r = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ के बिन्दुओं $t = 1$ तथा $t = 2$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं (tangents) के बीच कोण ज्ञात करो।

हल : $\because r = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ $\quad \therefore \vec{T_1} = \frac{dr}{dt} = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$,

जोकि बिन्दु t पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

[illegible] बिन्दु $t = 2$ पर प्रवणता, $\vec{T_2} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

यदि स्पर्श रेखाओं के बीच कोण θ है तो
$$\cos\theta = \frac{\vec{T_1}\cdot\vec{T_2}}{|\vec{T_1}|\ |\vec{T_2}|} = \frac{(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k})}{\sqrt{4+4+9} \times \sqrt{16 + 4 \times 144}}$$
$$= \frac{8 + 4 + 36}{\sqrt{17} \times \sqrt{164}} = \frac{48}{\sqrt{17 \times 164}} = \frac{48}{2\sqrt{17 \times 41}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{24}{\sqrt{697}}$$
उत्तर

उदाहरण 10. दिखाओ कि— $\frac{d}{dt}\left[v \cdot \frac{dv}{dt} \times \frac{d^2v}{dt^2}\right] = v \cdot \left[\frac{dv}{dt} \times \frac{d^3v}{dt^3}\right]$

हल :
$$\frac{d}{dt}\left[v \cdot \frac{dv}{dt} \times \frac{d^2v}{dt^2}\right] = \frac{dv}{dt} \cdot \left[\frac{dv}{dt} \times \frac{d^2v}{dt^2}\right] + v\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt} \times \frac{d^2v}{dt^2}\right)\right]$$
$$= \frac{dv}{dt} \cdot \left[\frac{dv}{dt} \times \frac{d^2v}{dt^2}\right] + v\left[\frac{d^2v}{dt^2} \times \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \times \frac{d^3v}{dt^3}\right]$$
$$= 0 + v\left[0 + \frac{dv}{dt} \times \frac{d^3v}{dt^3}\right] \qquad \left(\because \frac{d^2v}{dt^2} \times \frac{d^2v}{dt^2} = 0\right)$$
$$= v \cdot \left[\frac{dv}{dt} \times \frac{d^3v}{dt^3}\right]$$
उत्तर

उदाहरण 11. यदि $r = a\sin t\,\mathbf{i} + at\,\mathbf{j} + a\cos t\,\mathbf{k}$ तो निम्न के मान ज्ञात करो—

(i) $\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}$ (ii) $\left|\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right|$ (iii) $\left[\frac{dr}{dt}\ \frac{d^2r}{dt^2}\ \frac{d^3r}{dt^3}\right]$

हल :
$$r = a\sin t\,\mathbf{i} + at\,\mathbf{j} + a\cos t\,\mathbf{k}$$
$$\frac{dr}{dt} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j} - a\sin t\,\mathbf{k}$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = -a\sin t\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - a\cos t\,\mathbf{k}$$
$$\frac{d^3r}{dt^3} = -a\cos t\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + a\sin t\,\mathbf{k}$$

(i) $$\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos t & a & -a\sin t \\ -a\sin t & 0 & -a\cos t \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(-a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t) + a(-a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{k})$$
$$= a^2\mathbf{j} - a^2\cos t\,\mathbf{i} + a^2\sin t\,\mathbf{k} = a^2[-\cos t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}]$$

(ii) $$\left|\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right| = a^2\sqrt{\cos^2 t + 1^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2}a^2$$
उत्तर

(iii) $$\left|\frac{dr}{dt}\ \frac{d^2r}{dt^2}\ \frac{d^3r}{dt^3}\right| = \begin{vmatrix} a\cos t & a & -a\sin t \\ -a\sin t & 0 & -a\cos t \\ -a\cos t & 0 & a\sin t \end{vmatrix} = -a \times (-a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t) = a^3$$
उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 10

1. यदि $r = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ तो (i) $\frac{dr}{dt}$ (ii) $\frac{d^2r}{dt^2}$ (iii) $\frac{d^3r}{dt^3}$ के मान ज्ञात करो।

2. यदि $u = (2t-1)\,\mathbf{i} + 3(t+1)\,\mathbf{j} - 4t\,\mathbf{k}$ तथा $v = (t+1)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$ तो $t = 2$ पर निम्न के मान ज्ञात करो–
(i) $\frac{d}{dt}(u \cdot v)$ (ii) $\frac{d}{dt}(u \times v)$ (iii) $\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}\right)$ (iv) $\frac{d^2}{dt^2}(u + v)$

3. यदि $r = a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + at\,\mathbf{k}$ तो (i) $\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}$ (ii) $\left[\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \frac{d^3r}{dt^3}\right]$ के मान ज्ञात करो।

4. यदि $u = \sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} + \theta\,\mathbf{k}$, $v = \cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $w = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ तो $\theta = 0$ पर $\frac{d}{d\theta}[u \times (v \times w)]$ का मान ज्ञात करो।

5. यदि $r = \sin at\,\mathbf{i} + \cos at\,\mathbf{j}$ तो सिद्ध करो कि $r \times \frac{dr}{dt}$ एक अचर राशि है।

6. यदि $r = ae^{nt} + be^{-nt}$, जहाँ a तथा b सदिश स्थिरांक हैं, तब सिद्ध करो कि $\frac{d^2r}{dt^2} - n^2 r = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

7. यदि $r = \log(1+t^2)\,\mathbf{i} + 4\sin t\,\mathbf{j} - 6\cos t\,\mathbf{k}$ तो $t = 0$ पर (i) $\left|\frac{dr}{dt}\right|$ (ii) $\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|$ के मान ज्ञात करो।

8. यदि $\frac{da}{dt} = r \times a, \frac{db}{dt} = r \times b$ तो सिद्ध करो कि $\frac{d}{dt}(a \times b) = r \times (a \times b)$

9. एक कण एक ऐसे वक्र पर गतिमान है जिसका प्राचल समीकरण $x = 3t^2, y = t^2 - 2t, z = t^3$ है, जहाँ t समय है। $t = 2$ पर कण का वेग तथा त्वरण ज्ञात करो।

10. वक्र $x = e^{-t}, y = 2\cos 3t, z = 2\sin 3t$ पर गतिमान कण का वेग तथा त्वरण ज्ञात करो जब $t = 0$

11. वक्र $r = 4t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 2t^3\,\mathbf{k}$ के बिन्दुओं $t = 1$ तथा $t = 2$ पर स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करो।

उत्तरमाला 10

1. (i) $\frac{dr}{dt} = -a\sin t\,\mathbf{i} + b\cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (ii) $\frac{d^2r}{dt^2} = -a\cos t\,\mathbf{i} - b\sin t\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
(iii) $\frac{d^3r}{dt^3} = a\sin t\,\mathbf{i} - b\cos t\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
2. (i) 28 (ii) $-11\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$ (iii) 0 (iv) 0
3. (i) $a^2(\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} - \mathbf{k})$ (ii) $-a^3$
4. $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ 7. (i) 4 (ii) $2\sqrt{10}$
9. वेग $v = 12\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ त्वरण $a = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$
10. वेग $= \sqrt{37}$ तथा त्वरण $= 5\sqrt{13}$ 11. $\theta = \cos^{-1}\frac{21}{2\sqrt{133}}$

11 ग्रेडिएन्ट, डाइवर्जेन्स तथा कर्ल (Gradient, Divergence and Curl)

1. **आंशिक अवकलन (Partial Differentiation) :**

जब कोई फलन दो या दो से अधिक चरों का फलन होता है और उसे किसी एक चर के सापेक्ष अवकलन करना है तो अन्य चर राशियों को स्थिर मानकर, अवकलन की सामान्य विधियों का प्रयोग कर, फलन को अवकलित कर दिया जाता है। इस प्रकार के अवकलन को आंशिक अवकलन कहते हैं और आंशिक अवकल गुणांकों को $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ... से निरूपित करते हैं। जैसे :

यदि $f = 2x^2y + 3xy^2z + xyz^2$, तब

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 3y^2z + yz^2 \quad (y \text{ तथा } z \text{ को स्थिरांक माना गया है})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 6xyz + xz^2 \quad (x \text{ तथा } z \text{ को स्थिरांक माना गया है})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + 3xy^2 + 2xyz \quad (x \text{ तथा } y \text{ को स्थिरांक माना गया है})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xz;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2xy$$

2. **सदिश ऑपरेटर या डेल ऑपरेटर (Vector Operator or Del Operator) :**

$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$, एक सदिश ऑपरेटर है जिसे ∇ से प्रदर्शित करते हैं और डेल ऑपरेटर कहते हैं। अतः

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

3. **ग्रेडिएन्ट (Gradient) :**

यदि $\phi(x, y, z)$ एक अदिश फलन है जो सतत एवं अवकलनीय है तो सदिश फलन $\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$ को ϕ का ग्रेडिएन्ट कहते हैं और grad ϕ से निरूपित करते हैं।

$\Rightarrow$ समी० (1) से, $\quad \text{grad}\,\phi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \nabla\phi \Rightarrow \text{grad}\,\phi = \nabla\phi$

उदाहरणतः माना कि $\phi = x^2y + z$ ...(1)

तब
$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + z) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + z) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2y + z)$$
$$= \mathbf{i} \times (2xy + 0) + \mathbf{j}(x^2 \times 1 + 0) + \mathbf{k}(0 + 1)$$
$$= 2xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad ...(2)$$

परिणाम (2), फलन (1) का gradient है अर्थात्

$$\text{grad}(x^2y + z) = 2xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4. ग्रेडिएन्ट के प्रगुण (Properties of Gradient) :

ग्रेडिएन्ट की दिशा, क्षेत्र $\phi = c$ के लम्बवत् होती है [$\nabla\phi$ is normal to the surface $\phi = c$] ।

सत्यापन—माना कि क्षेत्र $\phi(x, y, z) = c$ पर P कोई बिन्दु है जिसका स्थिति सदिश r है। Q उसके समीप कोई अन्य बिन्दु है जिसका स्थिति सदिश $(r + \partial r)$ है। तब $\vec{PQ} = r + \partial r - r = \partial r$ और

$$\nabla\phi \cdot \partial r = \left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}\,\partial x + \mathbf{j}\,\partial y + \mathbf{k}\,\partial z)$$

$$= \mathbf{i}^2\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\partial x + \mathbf{j}^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\partial y + \mathbf{k}^2\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\partial z + 0 + 0 + \ldots$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\partial x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\partial y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\partial z = \partial\phi \text{ (अवकलन गणित से)} \quad (\because \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1)$$

अब चूँकि बिन्दु Q उसी तल पर स्थित है जिस पर P स्थित है, अतः P से Q तक जाने में ϕ का मान उतना ही रहता है,

$\Rightarrow \partial\phi = 0 \Rightarrow \nabla\phi\cdot\partial r = \partial\phi = 0$ अतः $\nabla\phi\cdot\partial r$ के शून्य के बराबर होने का अर्थ है कि $\nabla\phi$ क्षेत्र के लम्बवत् है।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. ग्रेडिएन्ट की दिशा, क्षेत्र $\phi = c$ के लम्बवत् होती है [$\nabla\phi$ is normal to the surface $\phi = c$]
2. $\nabla\phi$ का मापांक, क्षेत्र $\phi = c$ की लम्बवत् दिशा में ϕ के परिवर्तन की दर के बराबर होता है और इस दिशा में परिवर्तन की दर अधिकतम होती है। [$\nabla\phi$ measures the rate of change of ϕ in the direction perpendicular to surface $\phi = c$. and it is the maximum rate of change.]
3. किसी अन्य दिशा में ϕ के परिवर्तन की दर, $\nabla\phi$ तथा उस दिशा में इकाई सदिश के अदिश गुणनफल के बराबर होती है। इसे दिष्ट अवकलज (directional derivative) भी कहते हैं। अर्थात्
   दिष्ट अवकलज (directional derivative) = Rate of change ϕ in any direction $= \nabla\phi\cdot\hat{n}$
4. यदि ϕ तथा ψ दो अवकलनीय अदिश फलन हैं और c कोई अचर राशि है तब (i) $\nabla c = 0$ (ii) $\nabla(c\phi) = c\nabla\phi$ (iii) $\nabla(\phi \pm \psi) = \nabla\phi \pm \nabla\psi$ (iv) $\nabla(\phi\cdot\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$ (v) $\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. फलन $\phi = xyz$ का बिन्दु $(-1, 2, 1)$ पर ग्रेडिएन्ट ϕ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\text{grad}\,\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

$\because \phi = xyz \quad \therefore \frac{\partial\phi}{\partial x} = yz;\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = xz;\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = xy$

$\Rightarrow \text{grad}\,\phi = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

$x = -1, y = 2, z = 1$ रखने पर, $\text{grad} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ उत्तर

उदाहरण 2. $\phi(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$ के बिन्दु $P(2, 1, 2)$ पर इकाई लम्ब सदिश (unit normal vector) ज्ञात कीजिए।

हल: $\phi = 3x^2 + 2y^2 + z^2$

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 6x,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 4y,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = 6x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$x = 2, y = 1, z = 2$ रखने पर, $\nabla\phi = 12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$$|\nabla\phi| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16 + 16} = 4\sqrt{11}$$

अभीष्ट लम्ब सदिश (unit normal vector)

$$= \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{4\sqrt{11}} = \frac{3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{11}}$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\phi = x^2 + y^2 + 4xyz$ के बिन्दु $(1, -2, 2)$ पर सदिश $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ की दिशा में दिष्ट अवकलज (directional derivative) ज्ञात करो।

हल: $\phi = x^2 + y^2 + 4xyz \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x + 0 + 4yz = 2x + 4yz$

$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 + 2y + 4xz = 2y + 4xz,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 + 0 + 4xy = 4xy$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\mathbf{k}$$

$$= (2x + 4yz)\cdot\mathbf{i} + (2y + 4xz)\cdot\mathbf{j} + 4xy\cdot\mathbf{k}$$

$x = 1, y = -2, z = 2$ रखने पर, $\nabla_\phi = -14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

$2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{n} = \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$

अब दिष्ट अवकलज $= \nabla\phi\cdot\hat{n} = (-14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k})\cdot\frac{(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}{3}$

$$= \frac{1}{3}[-28\mathbf{i}^2 - 8\mathbf{j}^2 - 8\mathbf{k}^2]$$

$$= \frac{1}{3}[-28\times 1 - 8\times 1 - 8\times 1]$$

$$= \frac{1}{3}[-28 - 8 - 8] = \frac{1}{3}\times -44 = -14\frac{2}{3}$$ उत्तर

उदाहरण 4. वह दिशा ज्ञात करो जिसमें $\phi = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ का बिन्दु $(1, 1)$ पर दिष्ट अवकलज (directional derivative) शून्य है।

हल: माना कि अभीष्ट दिशा में कोई सदिश $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ है। तब इस दिशा में इकाई सदिश

$$\hat{n} = \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad \phi = \frac{x^2 - y^2}{xy},\quad \text{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{xy\times 2x - (x^2 - y^2)\times y}{x^2y^2} = \frac{2x^2y - x^2y + y^3}{x^2y^2} = \frac{y(x^2 + y^2)}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{xy\times(-2y) - (x^2 - y^2)\times x}{x^2y^2} = \frac{-2xy^2 - x^3 + xy^2}{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{-x(y^2 + x^2)}{x^2y^2} \text{ तथा } \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(1) में ये मान रखने पर $\quad \text{grad}\,\phi = \frac{y(x^2+y^2)}{x^2y^2}\hat{i} - \frac{x(y^2+x^2)}{x^2y^2}\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\text{grad}\,\phi\,(1,1) = 2\hat{i} - 2\hat{j}$$

सदिश $(a\,\hat{i} + b\,\hat{j})$ की दिशा में ϕ का दिष्ट अवकलज

$$\nabla\phi\cdot\hat{n} = (2\hat{i} - 2\hat{j})\cdot\left(\frac{a\,\hat{i}+b\,\hat{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{2a-2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

लेकिन $\quad \nabla\phi\cdot\hat{n} = 0$ ($\because$ दिष्ट अवकलज का मान शून्य है)

$$0 = \frac{2a-2b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow a = b$$ उत्तर

अतः सदिश $a\,\hat{i} + b\,\hat{j} = a\,\hat{i} + a\,\hat{j}$. यदि यह सदिश x-अक्ष के साथ θ कोण बनाता है,

तब $$\cos\theta = \frac{(a\,\hat{i} + a\,\hat{j})\cdot\hat{i}}{\sqrt{a^2+a^2}\times 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$ उत्तर

उदाहरण 5. सिद्ध करो कि— $\nabla(u/v) = \frac{[v\nabla u - u\nabla v]}{v^2}$

हल: हम जानते हैं कि $\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$$\therefore \quad \nabla(u/v) = \hat{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(u/v) + \hat{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(u/v) + \hat{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(u/v)$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}\right\} + \hat{j}\left\{\frac{v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}\right\} + \hat{k}\left\{\frac{v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{v^2}\left[v\left(\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right) - u\left(\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{v^2}[v\nabla u - u\nabla v] = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$$ सिद्धम्

उदाहरण 6. यदि $r = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ तो सिद्ध करो कि (i) grad $r = \hat{r}$ (ii) grad $r^n = nr^{n-2}\cdot r$

हल: (i) $\quad \text{grad}\,r = \nabla r = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) r$

$$= \hat{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k} \quad \text{...(1)}$$

$\because \quad r = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} \therefore r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$ या $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ इसी प्रकार $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ तथा $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

समीकरण (1) में ये मान रखने पर,

$$\text{grad}\,r = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}$$

$$= \frac{1}{r}[x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}] = \frac{1}{r}\cdot r = \hat{r}$$ सिद्धम्

(ii) $\quad \text{grad}\,r^n = \nabla r^n = \hat{i}\frac{\partial(r^n)}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial(r^n)}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial(r^n)}{\partial z}$

$$= \hat{i}\cdot n\,r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\cdot n\,r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\cdot n\,r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= n\,r^{n-1}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= n\,r^{n-1}\left(\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}\right)$$

$$= n\,r^{n-2}(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) = nr^{n-2}\cdot r$$ सिद्धम्

5. सदिश फलन का डाइवर्जेंन्स (Divergence of a Vector Function) :

Del operator ∇ तथा सदिश फलन A के अदिश गुणनफल अर्थात् $\nabla\cdot A$ को सदिश फलन A का Divergence कहते हैं।

माना कि A कोई सदिश फलन है, अर्थात् $\quad A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

जहाँ A_x, A_y, A_z क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के अनुदिश अदिश घटक हैं, तब

$$\nabla\cdot A = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z)$$

$$= \hat{i}^2\frac{\partial}{\partial x}(A_x) + \hat{j}^2\frac{\partial}{\partial y}(A_y) + \hat{k}^2\frac{\partial}{\partial z}(A_z) \quad (\because \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z) \quad (\because \hat{i}^2 = \hat{j}^2 - \hat{k}^2 = 1)$$

जोकि अदिश राशि है। इसे सदिश फलन A का divergence कहते हैं और संक्षिप्त में div. A लिखते हैं।

6. सदिश फलन का कर्ल (Curl of a Vector Function) :

Del operator ∇ तथा सदिश फलन A के सदिश गुणनफल अर्थात् $\nabla\times A$ को फलन A का Curl या Rotation कहते हैं।

माना कि A कोई सदिश फलन है अर्थात् $A = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$

तब, $\quad \nabla\times A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_y)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_x)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(A_y) - \frac{\partial}{\partial z}(A_x)\right]$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_y)\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_x) - \frac{\partial}{\partial x}(A_z)\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(A_x)\right]\hat{k}$$

जोकि सदिश राशि है। इसे सदिश फलन A का Curl अथवा Rotation कहते हैं और Curl A लिखते हैं।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

1. Divergence तथा Curl केवल सदिश फलनों के ही होते हैं, अदिश फलनों के नहीं होते। अतः $\nabla \cdot \phi$ और $\nabla \times \phi$ अर्थहीन हैं चूँकि ϕ एक अदिश फलन है।
2. सदिश फलन का divergence एक अदिश फलन है जबकि उसका Curl एक सदिश फलन है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 7. सदिश $A = 2xy\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + 3xyz\mathbf{k}$ का divergence तथा Curl ज्ञात करो।

हल : $\text{div. } \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-xz) + \frac{\partial}{\partial z}(3xyz)$$

$$= 2y + 0 + 3xy = (2 + 3x)\,y \qquad \text{उत्तर}$$

$$\text{Curl } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & -xz & 3xyz \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(-xz)\right] - \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(3xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-xz) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right]$$

$$= \mathbf{i}\,(3xz + x) - \mathbf{j}\,(3yz - 0) + \mathbf{k}\,(-z - 2x)$$

$$= x\,(3z + 1)\,\mathbf{i} - 3yz\,\mathbf{j} - (z + 2x)\,\mathbf{k} \qquad \text{उत्तर}$$

नोट : A_x, A_y, A_z सदिश A के क्रमशः $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ के गुणांक हैं।

उदाहरण 8. सदिश क्षेत्र $(x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (y^2 - xy)\,\mathbf{k}$ का डाइवर्जेन्स तथा कर्ल ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)

हल : $A = (x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (y^2 - xy)\,\mathbf{k}$

$$\text{div} A = \frac{\partial}{\partial x}(A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - xy)$$

$$= (2x - 0) + (2x \times 1) + (0 - 0) = 4x \qquad \text{उत्तर}$$

$$\text{Curl } A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & 2xy & y^2 - xy \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(y^2 - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy)\right] - \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2)\right]$$

$$= \mathbf{i}\,[(2y - x) - 0] - \mathbf{j}\,[(0 - y) - 0] + \mathbf{k}\,[(2y - 0) - (0 - 2y)]$$

$$= (2y - x)\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 4y\,\mathbf{k} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 9. सिद्ध करो कि Curl grad $\phi = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 97, 2004)

हल : $\text{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}$

$$\text{Curl}\,(\text{grad}\,\phi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right] - \mathbf{j}\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right]$$

$$= \mathbf{i} \times 0 - \mathbf{j} \times 0 + \mathbf{k} \times 0 = 0 \qquad \text{सिद्ध}$$

उदाहरण 10. यदि $V = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ तो दिखाओ कि $\nabla \cdot V = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$

हल : $\nabla \cdot V = \text{div. } V = \frac{\partial}{\partial x}(V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(V_z)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) \qquad \text{...(1)}$$

अब
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \times 1 - x \times \frac{1 \times 2x}{2\,(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

इसी प्रकार,
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

तथा
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

समीकरण (1) में ये मान रखने पर,

$$\nabla \cdot V = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2\,(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \qquad \text{सिद्ध}$$

नोट : V_x, V_y, V_z, सदिश V में क्रमशः $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ के गुणांक हैं।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 11. यदि $F = x^2 \sin yz\, \mathbf{i} + y^2 \sin xz\, \mathbf{j} + z^2 \sin xy\, \mathbf{k}$ तो बिन्दु $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ पर div. F का मान ज्ञात करो।

हल: div. $F = \nabla \cdot F$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x^2 \sin yz\, \mathbf{i} + y^2 \sin xz\, \mathbf{j} + z^2 \sin xy\, \mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \sin xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 \sin xy)$$

$$= 2x \sin yz + 2y \sin xz + 2z \sin xy$$

$x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$ रखने पर, div. $F = 0$ उत्तर

उदाहरण 12. a, b, c के मान ज्ञात करो यदि

$$V = (x - 2y - az)\,\mathbf{i} + (bx + 2y - 2z)\,\mathbf{j} + (3x - cy + 4z)\,\mathbf{k}$$ irrotational है।

हल: ∵ V irrotational है अतः Curl $V = 0$

∴ $$\text{Curl } V = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - 2y - az & bx + 2y - 2z & 3x - cy + 4z \end{vmatrix} = 0$$

या $$\mathbf{i}(-c + 2) - \mathbf{j}(3 + a) + \mathbf{k}(b + 2) = 0$$

या $$(2 - c)\,\mathbf{i} - (3 + a)\,\mathbf{j} + (b + 2)\,\mathbf{k} = 0$$ जो तभी सम्भव है जब

$2 - c = 0, 3 + a = 0, b + 2 = 0$ अर्थात् $a = -3,\ b = -2,\ c = 2$ उत्तर

अभ्यासमाल 11

1. Grad ϕ का मान ज्ञात करो, जब
   (i) $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ के बिन्दु $(2, -1, 2)$ पर
   (ii) $\phi = \log r$ जहाँ $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)
   (iii) $\phi = e^{2x + 3y + 4z}$
   (iv) $\phi = x^3 - y^3 + xz^2$ के बिन्दु $(1, -1, 2)$ पर (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)
2. निम्नलिखित फलनों के दिए हुए बिन्दुओं पर ग्रेडिएन्ट ज्ञात करो–
   (i) $\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ के बिन्दु $(1, 1, 1)$ पर
   (ii) $\phi = 2x^2y - 3y^2z + z^2x$ के बिन्दु $(-1, 2, 1)$ पर
   (iii) $\phi = xy \sin z + yz \sin x + xz \sin y$ के बिन्दु $(0, \pi/2, \pi/2)$ पर
3. निम्नलिखित क्षेत्रों के दिए हुए बिन्दुओं पर इकाई लम्ब सदिश (Unit normal vector) ज्ञात कीजिए–
   (i) $x^3 + y^3 + 3xyz = 3$ के बिन्दु $(1, 2, -1)$ पर
   (ii) $x^2y + 2xz = 4$ के बिन्दु $(2, -2, 3)$ पर (उ० प्र० डिप्लोमा 1990)
4. निम्नलिखित फलनों के दिष्ट अवकलज (directional derivative) ज्ञात करो– (उ० प्र० डिप्लोमा 1992)
   (i) $4xz^3 - 3x^2y^2z^2$ के बिन्दु $(2, -1, 2)$ पर, z की दिशा में
   (ii) $x^2y^2z^2 - 2x^2y + 4y^2z$ के बिन्दु $(0, 1, 0)$ पर $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ की दिशा में

5. (i) फलन $f = 4xz^3 - 3x^2y^2$ के बिन्दु $(2, -1, 2)$ पर $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ की दिशा में दिष्ट अवकज (directional derivative) ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)
   (ii) $x^2 + y^2 + z^2$ का बिन्दु $(1, 2, 3)$ पर रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ की दिशा में दिशात्मक व्युत्पति (co-directional derivative) ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)
6. वह दिशा ज्ञात करो जिसमें $f(x, y) = (x^2 - y^2)/xy$ का दिष्ट अवकलज (directional derivative) बिन्दु $(1, 1)$ पर शून्य हो।
7. सिद्ध करो कि $\nabla(u \cdot v) = u\nabla v + v\nabla u$ संकेत : उदाहरण 4 की भाँति हल कीजिए।
8. $u = x^2 + yz^2$ के बिन्दु $(1, -1, 3)$ पर सबसे अधिक परिवर्तन की दर (greatest rate of change) ज्ञात कीजिए।
9. सदिश फलन $(x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (y^2 - 2xy)\,\mathbf{k}$ का divergence तथा curl ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)
10. यदि $F = xy^2\,\mathbf{i} + 2x^2yz\,\mathbf{j} - 3yz^2\,\mathbf{k}$ तो F का डाइवर्जेन्स (divergence) तथा कर्ल (curl) ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)
11. यदि $F = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{x + y}$ तो F का $(1, 1, 0)$ पर Curl ज्ञात करो।
12. div A ज्ञात करो जब $2x^2z\,\mathbf{i} - xy^2z\,\mathbf{j} + 34yz^2\,\mathbf{k}$
13. यदि $V = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ तो दिखाइए कि $\nabla \times V = 0$
14. Div F तथा Curl F ज्ञात करो यदि $F = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)
15. यदि $F = (x + y + 1)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - (x + y)\,\mathbf{k}$ तो सिद्ध करो कि $F \cdot \text{Curl } F = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1993, 2010)
16. यदि $F = \text{grad}\,(x^2 + y^2 + z^2)$ तो div. F तथा Curl F ज्ञात करो।
17. div. F तथा Curl F ज्ञात करो जहाँ $F = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 08)
18. दिखाओ कि सदिश क्षेत्र $F = 2xyz^3\,\mathbf{i} + x^2z^3\,\mathbf{j} + 3x^2yz^2\,\mathbf{k}$ irrotational है।
19. a, b, c के मान ज्ञात करो यदि $F = (2x + 3y + az)\,\mathbf{i} + (bx - 3y + 4z)\,\mathbf{j} + (x - cy + 6z)\,\mathbf{k}$ irrotational है।
20. $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ तो दिखाओ कि (i) grad $\left(\frac{1}{r}\right) = -\hat{r}/r^2$ (ii) div. $r = 3$ (iii) div. $\frac{r}{r^3} = 0$
21. (i) सिद्ध करो कि div $\cdot\, \bar{r} = 3$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)
    (ii) सिद्ध करो कि Curl grad $\phi = 0$. (उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 97, 2004)
22. यदि f तथा g दो सदिश फलन हैं तो सिद्ध करो कि $\nabla \cdot (f + g) = \nabla \cdot f + \nabla \cdot g$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

संकेत : माना कि $f = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$ तथा $g = g_1\,\mathbf{i} + g_2\,\mathbf{j} + g_3\,\mathbf{k}$

तब $$\nabla \cdot (f + g) = \frac{\partial}{\partial x}(f_1 + g_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f_2 + g_2) + \frac{\partial}{\partial z}(f_3 + g_3)$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}\right) = \nabla \cdot f + \nabla \cdot g$$

23. दिखाओ कि div. (grad r^n) $= n(n + 1)\,r^{n-2}$
24. Curl Curl A ज्ञात करो जहाँ $A = x^2y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} - yz\,\mathbf{k}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

25. यदि $\phi = x^2 + xz$ तथा $f = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$ तो बिन्दु (1, 1, 2) पर निम्नलिखित के मान ज्ञात करो–
(i) $\nabla\phi$ (ii) $\nabla\cdot f$ (iii) $\nabla \times f$ (iv) $(f \times \nabla)\phi$ (v) $f\cdot(\nabla\phi)$ संकेत : $(F \times \nabla)\phi = y \times (\nabla\phi)$

26. div. F का मान ज्ञात करो जहाँ $F = (x + 3y)\,\mathbf{i} + (y - 3z)\,\mathbf{j} + (x - 2z)\mathbf{k}$ तथा सिद्ध करो कि F सोलेनॉयडल है। (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

27. div. $(3x^2\,\mathbf{i} + 5xy^2\,\mathbf{j} + xyz^3\,\mathbf{k})$ का मान बिन्दु (1, 2, 3) पर ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1998)

28. बिन्दु (1, 2, 3) पर F का कर्ल ज्ञात करो यदि $F = (x^2 + yz)\,\mathbf{i} + (y^2 + zx)\,\mathbf{j} + (z^2 + xy)\,\mathbf{k}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

29. सदिश क्षेत्र $F = xyz\,\mathbf{i} + 3x^2y\,\mathbf{j} + (x^2 - y^2z)\,\mathbf{k}$ का डाइवर्जेंस तथा कर्ल ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 1999)

30. यदि $f = (x + y + 1)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + (-x - y)\,\mathbf{k}$ तो सिद्ध करो कि f कर्ल $f = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 08, 10)

31. सिद्ध कीजिए div. curl $\bar{A} = 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

उत्तरमाला 11

1. (i) $4(2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 21\mathbf{k})$ (ii) $\dfrac{(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})}{x^2 + y^2 + z^2}$
(iii) $\dfrac{(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})}{2x + 3y + 4z}$ (iv) $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

2. (i) $\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ (ii) $-(7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 14\mathbf{k})$
(iii) $\pi(1 + \pi/4)\,\mathbf{i}$

3. (i) $(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/\sqrt{14}$ (ii) $\frac{1}{3}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

4. (i) 48 (ii) $(2\sqrt{6})/3$ 5. 376 6. 45° 8. 11

9. $4x$; $2(y - x)\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 4y\,\mathbf{k}$

10. $y^2 + 2x^2z - 6yz$; $-(3z^2 + 2x^2y)\,\mathbf{i} + 2xy(2z - 1)\,\mathbf{k}$ 11. 0

12. $= -4x^2 - 2xyz + 6yz$ 14. $\dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 0 16. 6 ; 0

17. $6(x + y + z)$; 0 19. 1, 3, − 4 24. $(2x - 1)\,\mathbf{j}$

25. (i) $4\mathbf{i} + \mathbf{k}$ (ii) 12 (iii) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ (iv) $2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ (v) 12

26. div. $F = \nabla\cdot F = 0 \Rightarrow F$ सोलेनॉयडल है। 27. 80 28. 0

29. $3x^2 - y^3 + yz + 2xz$; $-2yz\,\mathbf{i} + (xz - z^2)\,\mathbf{j} + x(6y - z)\,\mathbf{k}$

12 सदिशों का समाकलन (Integration of Vectors)

1. **सदिश फलनों का समाकलन (Integration of Vector Functions) :**
अदिश फलनों की भाँति सदिश फलनों का भी समाकलन किया जा सकता है। माना कि $f(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$ एक अदिश चर t का परिमित (finite), एक मान (single valued) तथा सतत (continuous) एवं अवकलनीय (differentiable) सदिश फलन है और $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ एक निश्चित क्षेत्र (region) में सतत हैं, तब

$$\int f(t)\,dt = \mathbf{i}\int f_1(t)\,dt + \mathbf{j}\int f_2(t)\,dt + \mathbf{k}\int f_3(t)\,dt + c$$

जहाँ 'c' एक स्वेच्छ अचर सदिश (Arbitrary constant vector) है। इस समाकलन को **अनिश्चित समाकलन (Indefinite integration)** कहते हैं।
यदि समाकलन t की दो सीमाओं $t = a$ तथा $t = b$ के बीच किया जाए तब समाकलन

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left|F(t)\right|_a^b = f(b) - f(a)$$

को **निश्चित समाकलन (Definite Integral)** कहते हैं।

2. **कुछ मानक परिणाम (Some Standard Results) :**

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. $\because \dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ $\quad\therefore \displaystyle\int\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{u}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\right)dt = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + c$ (सूत्र)

2. $\because \dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ $\quad\therefore \displaystyle\int\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{u}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\right)dt = \mathbf{u}\times\mathbf{v} + c$ (सूत्र)

3. $\because \dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}^2) = 2\mathbf{u}\cdot\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ $\quad\therefore \displaystyle\int\left(2\mathbf{u}\cdot\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right)dt = \mathbf{u}^2 + c$

4. $\because \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right) = \dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$ $\quad\therefore \displaystyle\int\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}dt = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + c$

5. $\because \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right)^2 = 2\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$ $\quad\therefore \displaystyle\int\left(2\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)dt = \left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right)^2 + c$

6. $\because \dfrac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{u}) = \mathbf{a}\times\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, जहाँ $\mathbf{a}$ एक अचर सदिश है। $\therefore \displaystyle\int\left(\mathbf{a}\times\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right)dt = \mathbf{a}\times\mathbf{u} + c$ (सूत्र)

7. $\because \dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}\times\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right) = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\times\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\times\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = 0 + \mathbf{u}\times\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$ $\therefore \displaystyle\int\left(\mathbf{u}\times\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)dt = \mathbf{u}\times\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + c$

8. $\because \dfrac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}}) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{|\mathbf{u}|}\cdot\mathbf{u}\right) = \dfrac{1}{|\mathbf{u}|}\cdot\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} - \dfrac{1}{|\mathbf{u}^2|}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{u}$

9. $\therefore \displaystyle\int\left(\dfrac{1}{|\mathbf{u}|}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} - \dfrac{1}{|\mathbf{u}^2|}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{u}\right)dt = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} + c = \hat{u} + c$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $f(t) = (1 - t^2)\,\mathbf{i} + (1 + t^3)\,\mathbf{j} + (3t + 4)\,\mathbf{k}$, तब $\int f(t)\,dt$ का मान ज्ञात करो।

हल : $\because \quad f(t) = (1 - t^2)\,\mathbf{i} - (1 + t^3)\,\mathbf{j} + (3t + 4)\,\mathbf{k}$

$$\therefore \int f(t)\,dt = \mathbf{i}\int (1 - t^2)\,dt + \mathbf{j}\int (1 + t^3)\,dt + \mathbf{k}\,(3t + 4)\,dt$$

$$= \mathbf{i}\left(t - \frac{t^3}{3} + c_1\right) + \mathbf{j}\left(t + \frac{t^4}{4} + c_2\right) + \mathbf{k}\left(\frac{3t^2}{2} + 4t + c_3\right)$$

$$= \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\mathbf{i} + \left(t + \frac{t^4}{4}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{3t^2}{2} + 4t\right)\mathbf{k} + (c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k})$$

$$= \frac{1}{3}(3t - t^3)\,\mathbf{i} + \frac{1}{4}(4t + t^4)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(3t^2 + 8t) + C,$$ जहाँ C अचर सदिश है। उत्तर

उदाहरण 2. यदि $f(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 4t^3\,\mathbf{j} + 2t^4\,\mathbf{k}$ तो $\int f(t)\,dt$ का ज्ञात करो।

हल : $\because \quad f(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 4t^3\,\mathbf{j} + 2t^4\,\mathbf{k}$

$$\therefore \int f(t)\,dt = 3\mathbf{i}\int t^2 dt + 4\mathbf{j}\int t^3 dt + 2\mathbf{k}\int t^4 dt$$

$$= 3\mathbf{i}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{c_1}{3}\right) + 4\mathbf{j}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{c_2}{4}\right) + 2\mathbf{k}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{c_3}{2}\right)$$

$$= t^3\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + \frac{2t^5}{5}\,\mathbf{k} + (c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k})$$

$$= t^3\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + \frac{2t^5}{5}\,\mathbf{k} + C,$$ जहाँ $C = c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $\mathbf{r} = 6(t + t^2)\,\mathbf{i} + 3(t^2 + 1)\,\mathbf{j} - 3(t + 1)^2\,\mathbf{k}$ तो $\int_2^3 \mathbf{r}\,dt$ का मान ज्ञात करो।

हल : $$\int_2^3 \mathbf{r}\,dr = 6\mathbf{i}\int_2^3 (t + t^2)\,dt + 3\mathbf{j}\int_2^3 (t^2 + 1)\,dt - 3\mathbf{k}\int_2^3 (t + 1)^2\,dt$$

$$= 6\mathbf{i}\left|\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right|_2^3 + 3\mathbf{j}\left|\frac{t^3}{3} + t\right|_2^3 - 3\mathbf{k}\left|\frac{(t + 1)^3}{3}\right|_2^3$$

$$= 6\mathbf{i}\left[\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) + \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right)\right] + 3\mathbf{j}\left[\left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right) + (3 - 2)\right] - 3\mathbf{k}\left(\frac{64}{3} - \frac{27}{3}\right)$$

$$= 6\mathbf{i}\left(\frac{5}{2} + \frac{19}{3}\right) + 3\mathbf{j}\left(\frac{19}{3} + 1\right) - 3\mathbf{k} \times \frac{37}{3}$$

$$= 53\mathbf{i} + 22\mathbf{j} - 37\mathbf{k}$$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $\mathbf{a}(t) = (4t)\,\mathbf{i} + (3t - 2)\,\mathbf{j} + (t + 4)\,\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b}(t) = 2t\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}$ तब निम्नलिखित का मान ज्ञात करो।

(i) $\int_1^2 (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,dt$ (ii) $\int_0^2 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,dt$

हल : (i) $$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = [4t\,\mathbf{i} + (3t - 2)\,\mathbf{j} + (t + 4)\,\mathbf{k}]\,.\,[2t\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}]$$

$$= (3t - 2) \times 2t + (t + 4) \times 6t$$

$$= 6t^2 - 4t + 6t^2 + 24t = 12t^2 - 20t$$

$$\int_1^2 (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,dt = \int_1^2 (12t^2 - 20t)\,dt = \left|12 \times \frac{t^3}{3} - 20\frac{t^2}{2}\right|_1^2 = -2$$ उत्तर

(ii) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [4t\,\mathbf{i} + (3t - 2)\,\mathbf{j} + (t + 4)\,\mathbf{k}] \times [2t\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4t & 3t - 2 & t + 4 \\ 0 & 2t & 6t \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\,[(18t^2 - 12t) - (2t^2 + 8t)] - \mathbf{j}\,(24t^2 - 0) + \mathbf{k}\,(8t^2 - 0)$$

$$= (16t^2 - 20t)\,\mathbf{i} - 24\mathbf{j}\,t^2 + 8\mathbf{k}\,t^2$$

$$\int_0^2 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,dt = \mathbf{i}\int_0^2 (16t^2 - 20t)\,dt - 24\mathbf{j}\int_0^2 t^2\,dt + 8\mathbf{k}\int_0^2 t^2\,dt$$

$$= \mathbf{i}\left|\frac{16t^3}{3} - \frac{20t^2}{2}\right|_0^2 - 24\mathbf{j}\left|\frac{t^3}{3}\right|_0^2 + 8\mathbf{k}\left|\frac{t^3}{3}\right|_0^2$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{128}{3} - 40\right) - 24\mathbf{j} \times \frac{8}{3} + 8\mathbf{k} \times \frac{8}{3}$$

$$= \frac{8\mathbf{i}}{3} - \frac{192\mathbf{j}}{3} + \frac{64\mathbf{k}}{3} = \frac{8}{3}(\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\int_0^2 (e^{2t}\,\mathbf{i} + e^{-3t}\,\mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k})\,dt$ का मान ज्ञात करो।

हल : $$\mathbf{i}\int_0^2 e^{2t}\,dt + \mathbf{j}\int_0^2 e^{-3t}\,dt + \mathbf{k}\int_0^2 e^{4t}\,dt = \mathbf{i}\left|\frac{e^{2t}}{2}\right|_0^2 + \mathbf{j}\left|\frac{e^{-3t}}{-3}\right|_0^2 + \mathbf{k}\left|\frac{e^{4t}}{4}\right|_0^2$$

$$= \frac{\mathbf{i}}{2}(e^4 - 1) - \frac{\mathbf{j}}{3}(e^{-6} - 1) + \frac{\mathbf{k}}{4}(e^8 - 1)$$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि $\frac{d^2 f}{dt^2} = \mathbf{a}$ तो फलन f का मान ज्ञात करो जब $t = 0$ पर $f = 0$ तथा $\frac{df}{dt} = 0$

हल : $\because \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = \mathbf{a} \quad \therefore \int \frac{d^2 f}{dt^2}\,dt = \int \mathbf{a}\,dt \Rightarrow \frac{df}{dt} = \mathbf{a}\,t + c$ ...(1)

$\because t = 0, \frac{df}{dt} = 0$ से $c = 0$ (1) से, $\frac{df}{dt} = \mathbf{a}\,t$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

पुनः समाकलित करने पर, $\int \left(\frac{df}{dt}\right) dt = \int \mathbf{a}t\,dt \Rightarrow f = \mathbf{a} \cdot \frac{t^2}{2} + c$ ...(2)

$\because t = 0, f = 0$ से $c = 0$ $\therefore$ (2) से, $f = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ उत्तर

अभ्यासमाला 12

1. यदि $\mathbf{r}(t) = (t^2+2)\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}$ तो $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ का मान ज्ञात करो।

2. $\mathbf{u} = (2+4t)\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} - (8t+1)\,\mathbf{k}$ तो $\int_1^2 \mathbf{u}\,dt$ का मान ज्ञात करो।

3. यदि $\mathbf{u} = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} - 4t^3\,\mathbf{k}$ तो $\int_1^2 \left(u \times \frac{d^2u}{dt^2}\right) dt$ का मान ज्ञात करो।

   संकेत : $\int_1^2 \left(u \times \frac{d^2u}{dt^2}\right) dt = \left|u \times \frac{du}{dt}\right|_1^2$

4. यदि $\mathbf{a} = (3t+2)\,\mathbf{i} + (t-3)\,\mathbf{j} + 6t^2\,\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{b} = 4t\,\mathbf{i}' + (t+3)\,\mathbf{j}$ तो निम्न का मान ज्ञात करो—

   (i) $\int_0^2 (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,dt$ (ii) $\int_0^2 (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,dt$ (iii) $\int_0^2 [(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})]\,dt$

5. $\int_0^1 (3e^t\,\mathbf{i} + 2e^{3t}\,\mathbf{j} + e^{-4t}\,\mathbf{k})\,dt$ का मान ज्ञात करो।

6. यदि $\mathbf{u}\cdot d\mathbf{u} = 0$ तो सिद्ध करो कि $\mathbf{u}$ अचर है।

7. यदि $\mathbf{a} = 2t\,\mathbf{i} + (4t+1)\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2k$, $\mathbf{c} = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} - 6t\,\mathbf{k}$ तो $\int_0^1 \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,dt$ का मान ज्ञात करो।

8. $\int_0^2 [(u^2+2u+1)\,\mathbf{i} + (u-1)\,\mathbf{j} + 24k]\,du$ का मान ज्ञात करो।

9. सदिश $\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जो समीकरण $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}$ को सन्तुष्ट करता है।

   संकेत : $\int \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) dt = \int \mathbf{a}\,dt \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{a}\int 1\,.\,dt = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ उत्तर

10. सदिश $\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जो समीकरण $\mathbf{a} \times \frac{d_2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{b}$ को सन्तुष्ट करता है।

    संकेत : $\int \left(\mathbf{a} \times \frac{d_2\mathbf{r}}{dt^2}\right) dt = \int \mathbf{b}\,dt \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{b}t + \mathbf{c} \Rightarrow \int \mathbf{a} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) dt = \int (\mathbf{b}t + \mathbf{c})\,dt$

    $\Rightarrow a \times r = \frac{bt^2}{2} + ct + d$, जहाँ a, b, c, d अचर सदिश हैं।

11. $\int_1^2 \int_0^{y/2} y\,dydx$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

    संकेत : $I = \int_1^2 \int_0^{y/2} y\,dxdy = \int_1^2 y\,|x|_0^{y/2}\,dy = \int_1^2 \frac{y \times y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left|\frac{y^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{6}$ उत्तर

12. $\int_0^b \int_0^a (x^2+y^2)\,dxdy$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

13. $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x+y+z) = dz\,dx\,dy$ का मान ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

उत्तरमाला 12

1. $\frac{1}{3}(t^3+6t)\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + 2t^2\,\mathbf{k} + c$ 2. $6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 3. $-112\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$

4. (i) $\frac{98}{3}$ (ii) $-72\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + \frac{190}{3}\mathbf{k}$ (iii) $\frac{3296}{15}$

5. $3(e-1)\,\mathbf{i} + \frac{2}{3}(e^3-1)\,\mathbf{j} - \frac{1}{4}(e^{-4}-1)\,\mathbf{k}$

7. $-\frac{11}{6}\mathbf{i} - \frac{40}{3}\mathbf{j} + \frac{113}{3}\mathbf{k}$ 8. $\frac{26}{3}\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ 10. $ar = \frac{bt}{2} + ct + d$

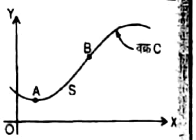
12. $\frac{ab}{3}(a^2+b^2)$ 13. 18

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

13 रेखा, पृष्ठ तथा आयतन समाकल
(Line, Surface and Volume Integrals)

1. रेखा समाकल (Line Integral) :



हम जानते हैं कि $I = \int_a^b f(x)\,dx$, x-अक्ष के अनुदिश निश्चित समाकल है।

माना कि C एक वक्र है और s, वक्र के किसी चाप AB की लम्बाई है।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

(i) यदि $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ सदिश बिन्दु फलन (Vector point function) है तब $\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, जहाँ $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$ है, को वक्र के अनुदिश, $\mathbf{F}$ का रेखा समाकल (Line Integral) कहते हैं।

(ii) $\int_c \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,ds$ को जहाँ $\hat{\mathbf{T}}$ वक्र की स्पर्श रेखा के अनुदिश इकाई सदिश है तथा ds, वक्र के चाप s का छोटा-सा भाग (element) है, स्पर्शीय रेखा समाकल (Tangential Line Integral) कहते हैं।

(iii) यदि समाकलन का मार्ग (path of integral) एक बन्द वक्र (closed curve) है तब रेखा समाकल को वक्र C के साथ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ की परिसंचारिता (circulation along a curve) कहते हैं और रेखा समाकल $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ को $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ से प्रदर्शित करते हैं अर्थात् परिसंचारिता समाकल (circulation integral) $= \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

(iv) यदि किसी क्षेत्र में सदिश फलन $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ की बन्द वक्र के साथ परिसंचारिता (circulation) शून्य है तब फलन $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ अघूर्ण सदिश बिन्दु फलन (irrotational vector point function) कहलाता है अर्थात् यदि $\int_c \mathbf{F}dr = 0$ तब सदिश F, आघूर्ण सदिश (irrotational vector) है।

(v) रेखा समाकल $\int_c \mathbf{F}(\mathbf{r})\,dr$ समाकल पथ पर निर्भर नहीं करता (Line integral does not depend on the path of integration)।

2. रेखा समाकल का कार्तीय रूप (Cartesian Form of Line Integral) :

माना कि $\quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ तब, $\quad d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$

माना कि $\quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$

$$\int_c \mathbf{F}(\mathbf{r})\,dr = \int_c (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz)$$

$$\Rightarrow \int_c \mathbf{F}(\mathbf{r})\,dr = \int_c F_1dx + F_2dy + F_3dz$$

जोकि कार्तीय रूप (Cartesian form) में F का रेखा समाकल है।

3. रेखा समाकल का प्राचल रूप (Parametric Form of Line Integrals) :

माना कि वक्र C का प्राचल समीकरण (Parametric equation), $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ है।

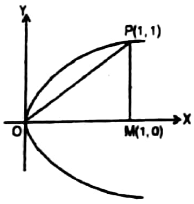
तथा $\quad \mathbf{F} = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$, तब

$$\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2}\left[F_1(t)\frac{dx}{dt} + F_2(t)\frac{dy}{dt} + F_3(t)\frac{dz}{dt}\right]dt$$ जोकि प्राचल रूप में F का रेखा समाकल है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. यदि सदिश क्षेत्र $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ है तो मूल बिन्दु O से बिन्दु $P(1, 1)$ तक (i) रेखा OP के अनुदिश (ii) परवलय $y^2 = x$ के अनुदिश, रेखा समाकल ज्ञात करो।

हल : रेखा समाकल $= \int_{OP} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ तथा $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$



(i) OP के अनुदिश रेखा समाकल—

$$\int_{OP} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{OP} (x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy) = \int_{OP} (x^2\,dx - xy\,dy)$$

$$= \int_{OP} (x^2\,dx - x^2dx) \quad (\because OP \text{ के अनुदिश } y = x, dy = dx)$$

$$= 0$$ उत्तर

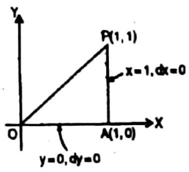
(ii) परवलय $y^2 = x$ के अनुदिश रेखा समाकल—

$$\int_{\text{परवलय } OP} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{परवलय } OP} (x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy)$$

$$= \int_{\text{वक्र } OP} (x^2dx - xy\,dy) = \int_0^1 \left(x^2dx - x\cdot\frac{dx}{2}\right) \quad (\because y^2 = x \text{ से } 2y\,dy = dx)$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)dx = \left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{12}$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $\mathbf{F} = (3x + 2y)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j}$ तो मूल बिन्दु O से $A(1, 0)$ तक x-अक्ष के अनुदिश और फिर $A(1, 0)$ से $P(1, 1)$ तक y-अक्ष के समान्तर पथ पर $\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो।



हल : $\quad \mathbf{F} = (3x + 2y)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j}$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$$

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int [(3x + 2y)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j}]\cdot(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy)$$

$$= \int [(3x + 2y)\,dx + (2x + y)\,dy] \quad \ldots(1)$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

OA के अनुदिश रेखा समाकलन, रेखा OA पर, $y = 0, dy = 0$ तथा x का मान 0 से 1 तक है।

$$\int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{OA} (3x + 2y)\,dx + \int_{OA} (2x + y)\,dy$$

$$= \int_0^1 (3x + 0)\,dx + 0 \quad (\because OA \text{ पर}, y = 0, dy = 0)$$

$$= \left|\frac{3x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Y-अक्ष के समान्तर OA के अनुदिश रेखा समाकलन

$$\int_{AP} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AP} (3sie6x + 2y)\,dx + \int_{AP} (2x + y)\,dy$$

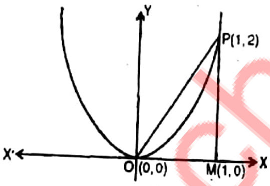
$$= 0 + \int_0^1 (2 \times 1 + y)\,dy, \quad (\because AP \text{ पर}, x = 1, dx = 0, y = 0 \text{ से } 1 \text{ तक})$$

$$= \left|2y + \frac{y^2}{2}\right|_0^1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{OAP} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{AP} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

उत्तर

उदाहरण 3. $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$ तथा (i) वक्र C का पथ $O(0, 0)$ से $P(1, 2)$ तक सरल रेखा OP है। (ii) वक्र C का पथ परवलय $y = 2x^2$ पर O से P तक है।



हल :

$$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (y^2\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy)$$

$$= y^2\,dx + 2xy\,dy$$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c (y^2\,dx + 2xy\,dy)$$

(i) समाकलन पथ रेखा OP है जिसका समीकरण $y = 2x$ है।

$$\int_{\text{रेखा } OP} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (y^2\,dx + 2xy\,dy)$$

$$= \int_0^1 [(2x)^2\,dx + 2x \cdot 2x \cdot 2dx] \quad (\because y = 2x, dy = 2dx)$$

$$= \int_0^1 12x^2\,dx = 12 \times \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 4$$

(ii) समाकल पथ परवलय $y = 2x^2$ पर O से P तक है।

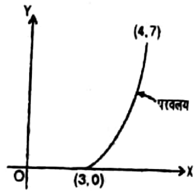
$$\int_{\text{परवलय } OP} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{परवलय } OP} (y^2\,dx + 2xy\,dy)$$

$$= \int_0^1 [(2x^2)^2\,dx + 2x \times 2x^2 \times 4x\,dx] \quad (\because y = 2x^2 \text{ तथा } dy = 4x\,dx)$$

$$= \int_0^1 20x^4\,dx = 20 \times \left|\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = 4$$

स्पष्ट है कि रेखा समाकल (line integral) का मूल्य पथ से स्वतन्त्र है।

उदाहरण 4. $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $F = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{j}$ और समाकल पथ xy तल में परवलय $x^2 = y + 9$ पर बिन्दुओं (3, 0) और (4, 7) के बीच का चाप (arc) है।



हल :

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c [2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{j}]\,(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy)$$

$$= \int_c [2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy]$$

$$= \int_3^4 2x(x^2 - 9)\,dx + \int_0^7 (y + 9 + y^2)\,dy$$

$$= \int_3^4 (2x^3 - 18x)\,dx + \int_0^7 (y^2 + y + 9)\,dy$$

$$= \left|\frac{2x^4}{4} - \frac{18x^2}{2}\right|_3^4 + \left|\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 9y\right|_0^7 = \frac{49}{2} + \frac{1211}{6} = \frac{1358}{6} = \frac{679}{3}$$

उत्तर

उदाहरण 5. यदि $\mathbf{F} = (3x^2 + 6y)\,\mathbf{i} - 14yz\,\mathbf{j} + 20xz^2\,\mathbf{k}$ तब $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो। यदि समाकल का पथ मूल बिन्दु $O(0, 0, 0)$ से बिन्दु $A(1, 1, 1)$ तक (i) $x = t, y = t^2, z = t^3$ के अनुदिश है। (ii) सरल रेखा OA के अनुदिश है।

हल : $\mathbf{F} = (3x^2 + 6y)\,\mathbf{i} - 14yz\,\mathbf{j} + 20xz^2\,\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$

$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (3x^2 + 6y)\,dx - 14yz\,dy + 20xz^2\,dz$

(i) $\because x = t, y = t^2, z = t^3; dx = dt, dy = 2t\,dt, dz = 3t^2\,dt$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [F_1(t)\,dt + F_2(t)\,dt + F_3(t)\,dt]$$

$$= \int_0^1 [(3t^2 + 6t)\,dt - 14t^2 \times t^3 \times 2t\,dt + 20t \times t^6 \times 3t^2\,dt]$$

$$= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = \left|9\frac{t^3}{3} - 28 \times \frac{t^7}{7} + 60 \times \frac{t^{10}}{10}\right|_0^1 = 5$$

उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(ii) बिन्दुओं (0, 0, 0) तथा (1, 1, 1) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{1-0} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = t \quad (\text{मान लिया})$$

तब $x = t,\ y = t,\ z = t,\quad dx = dt,\ dy = dt,\ dz = dt$ जहाँ t, 0 से 1 तक है

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c [(3x^2 + 6y)\,dx - 14yz\,dy + 20xz^2\,dz]$$

$$= \int_0^1 [(3t^2 + 6t)\,dt - 14t^2\,dt + 20t^3\,dt]$$

$$= \int_0^1 (6t - 11t^2 + 20t^3)\,dt = \left| 6\frac{t^2}{2} - 11\frac{t^3}{3} + 20\frac{t^4}{4} \right|_0^1 = \frac{13}{3}$$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि बल $\mathbf{F} = xy^2\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j}$ एक कण को xy समतल (plane) में बिन्दु (0, 0) से (1, 3) तक परवलय $y = 2x^2$ के अनुदिश विस्थापित करता है तो बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

हल: $\mathbf{F} = xy^2\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j},\quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},\quad d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$

$$\text{कार्य} = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c (xy^2\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy)$$

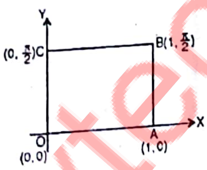
$$= \int_c (xy^2\,dx + 2x^2y\,dy)$$

समाकल पथ परवलय $y = 2x^2$ है जिससे $dy = 4x\,dx$ तथा x, शून्य से 1 तक है।

$$\therefore \quad W = \int_0^1 [x \times (2x^2)^2\,dx + 2x^2 \times 2x^2 \times 4x\,dx]$$

$$= \int_0^1 (4x^5 dx + 16x^5 dx) = \int_0^1 20x^5\,dx = 20 \times \left| \frac{x^6}{6} \right|_0^1 = \frac{10}{3}$$ उत्तर

उदाहरण 7. वक्र C पर परिसंचारण (circulation) ज्ञात करो यदि $\mathbf{F} = e^{2x} \sin y\,\mathbf{i} + e^{2x} \cos y\,\mathbf{j}$ है तथा वक्र c एक आयत है जिसके शीर्ष (0, 0), (1, 0), $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ हैं।



हल: $\mathbf{F}$ का परिसंचारण $= \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$= \int_c (e^{2x} \sin y\,\mathbf{i} + e^{2x} \cos y\,\mathbf{j})\,(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy)$$

$$= \int_c (e^{2x} \sin y\,dx + e^{2x} \cos y\,dy)$$

$$= \int_{OA} (e^{2x} \sin y\,dx + e^{2x} \cos y\,dy) + \int_{AB} (e^{2x} \sin y\,dx + e^{2x} \cos y\,dy)$$

$$+ \int_{BC} (e^{2x} \sin y\,dx + e^{2x} + e^{2x} \cos y\,dy) + \int_{CO} (e^{2x} \sin y\,dx + e^{2x} \cos y\,dy)$$

OA पथ पर, $y = 0, dy = 0, x$ का मान 0 से 1 तक है (x varies from 0 to 1)

AB पथ पर, $x = 1, dx = 0, y$ का मान 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक है (y varies from 0 to $\frac{\pi}{2}$)

BC पथ पर, $y = \frac{\pi}{2}, dy = 0, x$ का मान 1 से 0 तक है (x varies from 1 to 0)

CO पथ पर, $x = 0, dx = 0, y$ का मान $\frac{\pi}{2}$ से 0 तक है (y varies from $\frac{\pi}{2}$ to 0)

$$\therefore \text{ परिसंचारण} = \int_0^1 (0 + 0) + \int_0^{\pi/2} (0 + e^2 \cos y\,dy) + \int_1^0 \left(e^{2x} \sin\frac{\pi}{2}\,dx + 0\right)$$

$$+ \int_{\pi/2}^0 (0 + 1 \times \cos y\,dy)$$

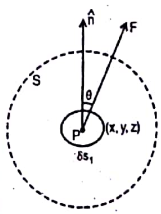
$$= \int_0^{\pi/2} e^2 \cos y\,dy + \int_1^0 e^{2x}\,dx + \int_{\pi/2}^0 \cos y\,dy$$

$$= e^2 \times \left| \sin y \right|_0^{\pi/2} + \left| \frac{e^{2x}}{2} \right|_1^0 + \left| \sin y \right|_{\pi/2}^0$$

$$= e^2 (1 - 0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^2) + (0 - 1) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$ – उत्तर

4. पृष्ठ समाकल (Surface Integral) :

माना कि $\mathbf{F}$ एक सतत सदिश बिन्दु फलन (continuous vector point function) है तथा S दिया हुआ पृष्ठ है। पृष्ठ S को अनेक छोटे-छोटे उप-पृष्ठों $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3, \ldots$ में विभाजित करो।



माना कि δs_1 किसी एक उप-पृष्ठ (sub-divided surface) का क्षेत्रफल है तथा $p\,(x, y, z)$ उस पर कोई बिन्दु है। बिन्दु P पर $\hat{n}$ एक बहुर्मुखी इकाई लम्ब सदिश (outward unit normal vector) है। तब $\int_s \int \mathbf{F} \cdot \hat{n}\,ds$ को पृष्ठ के अभिलम्ब के अनुदिश (along the normal to the surface) पृष्ठ समाकल (surface integral) कहते हैं। $\mathbf{F} \cdot \hat{n}$, पृष्ठ अभिलम्ब के अनुदिश F का घटक है। इस प्रकार,

$$\text{अभिलम्ब के अनुदिश, पृष्ठ समाकल} = \int_s \int \mathbf{F} \cdot \hat{n}\,ds$$

जहाँ $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ तथा $ds = dy\,dz\,\mathbf{i} + dz\,dx\,\mathbf{j} + dx\,dy\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{F} \cdot ds = F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \int_s \int \mathbf{F} \cdot \hat{n}\,ds = \int_s \int F_n\,ds = \int_s \int (F_1 dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy)$$

उदाहरण 8. $\int_s \int \mathbf{F} \cdot \hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात करो जबकि $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ तथा S, समतल $2x + 2y + z = 6$ का प्रथम अष्टांक (first octant) में क्षेत्र है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल :
$$\int_s\int \mathbf{F}_n \, . \, ds = \int\int \mathbf{F} \, . \, \hat{n} \, ds$$

$\because$ समतल $2x + 2y + z = 6$ का अभिलम्ब सदिश $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ है।

$$\text{इकाई लम्ब सदिश} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$$

$$\mathbf{F} \, . \, \hat{n} = [xy\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}] \cdot \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}[2xy - 2x^2 + x] = \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{3}$$

दिए हुए समतल का प्रथम अष्टांक (octant) अर्थात् xy-तल, जहाँ $z = 0$ में प्रक्षेप त्रिभुजीय क्षेत्र है जो $x = 0, y = 0$ तथा $2x + 2y = 6$ या $y = 3 - x$ से घिरा है।

$$\therefore \quad \int_s\int \mathbf{F} \, . \, \hat{n} ds = \int_0^3 \int_0^{3-x} \left(\frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{x}{3}\right) dy \, dx$$

$$= \int_0^3 \left|\frac{2}{3}x \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}x^2 y + \frac{1}{3}xy\right|_0^{3-x} dx$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{1}{3}x(3 - x)^2 - \frac{2}{3}x^2(3 - x) + \frac{1}{3}x(3 - x)\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left(3x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{x^2}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^3 - \frac{13}{3}x^2 + 4x\right) dx = \left|\frac{x^4}{4} - \frac{13x^3}{9} + \frac{4x^2}{2}\right|_0^3$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{13 \times 27}{9} + 2 \times 9 = -\frac{3}{4}$$

उत्तर

उदाहरण 9. पृष्ठ समाकल $\int\int_s \mathbf{F} \, . \, \hat{n} \, ds$ का मान ज्ञात करो यदि $\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 3y^2 z\mathbf{k}$ तथा s, बेलन $x^2 + y^2 = 9$ का वक्र पृष्ठ है जो प्रथम अष्टांक में समतलों $z = 0$ और $z = 2$ के बीच घिरा है।

हल :
$$\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 3y^2 z\,\mathbf{k}$$

माना कि बेलन पर किसी बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक (polar coordinates) (r, ϕ, z) हैं तब

$$x = r\cos\phi \, , \qquad y = r\sin\phi \, , \qquad z = z$$

यहाँ पर,
$$x = 3\cos\phi \, , \qquad y = 3\sin\phi \, , \qquad z = z \qquad (\because r = 3)$$

समतलों $z = 0$ और $z = 2$ के बीच, बेलन $x^2 + y^2 = 3^2$ का जो पृष्ठ अष्टांक में है, के लिये,

$$r = 3 \quad , \quad 0 < \phi \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le z \le 2$$

$$\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 3y^2 z\,\mathbf{k}$$
$$= z\,\mathbf{i} + 3\cos\phi\,\mathbf{j} - 3 \times 3^2 \sin^2\phi \, z\,\mathbf{k}$$
$$= z\mathbf{i} + 3\cos\phi\,\mathbf{j} - 27\sin^2\phi z\,\mathbf{k}$$

$\hat{n}$ = बेलन $x^2 + y^2 = 9$ का लम्ब इकाई सदिश

$$= \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3\cos\phi\,\mathbf{i} + 3\sin\phi\,\mathbf{j}}{\sqrt{9\cos^2\phi + 9\sin^2\phi}} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \, . \, \hat{n} = (z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 3y^2 z\,\mathbf{k}) \, . \, (\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})$$
$$= (z\,\mathbf{i} + 3\cos\phi\,\mathbf{j} - 27\sin^2\phi\, z\,\mathbf{k}) \, . \, (\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})$$
$$= z\cos\phi + 3\cos\phi\sin\phi$$

$$ds = r\,d\phi\,dz = 3d\phi\,dz$$

$$\int\int_s \mathbf{F} \, . \, \hat{n} \, ds = \int_{z=0}^{2} \int_{\phi=0}^{\pi/2} (z\cos\phi + 3\cos\phi\sin\phi) \, . \, 3d\phi dz$$

$$= \int_{z=0}^{2} \left|z\sin\phi + \frac{3}{2} \times \left(\frac{-\cos 2\phi}{2}\right)\right|_0^{\pi/2} 3 \, . \, dz$$

$$= 3\int_0^2 \left[z \times (1 - 0) - \frac{3}{4}(-1 - 1)\right] dz$$

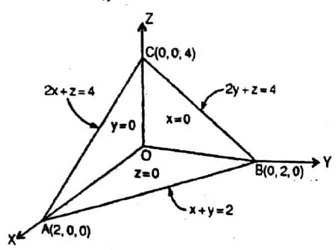
$$= 3\int_0^2 \left(z + \frac{3}{2}\right) dz$$

$$= 3\left|\frac{z^2}{2} + \frac{3}{2}z\right|_0^2 = 3(2 + 3) = 15$$

उत्तर

उदाहरण 10. समाकल पृष्ठ $\int\int \mathbf{F} \, . \, ds$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + (z^2 - zx)\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$ तथा S उस त्रिभुज का पृष्ठ है जिसके शीर्ष $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 4)$ हैं।

हल : यहाँ पर S, समतल (plane) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ अर्थात् $2x + 2y + z = 4$ का पृष्ठ है जो रेखाओं $x + y = 2, z = 0$; $2y + z = 4, x = 0$ तथा $2x + z = 4, y = 0$ से घिरा है।



$$\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + (z^2 - z)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k} \, , \; ds = \mathbf{i}\,dy\,dz + \mathbf{j}\,dz\,dx + \mathbf{k}\,dx\,dy$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = [x\,\mathbf{i} + (z^2 - z)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}\,dy\,dz + \mathbf{j}\,dz\,dx + \mathbf{k}\,dx\,dy)$$

$$= x\,dy\,dz + (z^2 - z)\,dz\,dx - y\,dx\,dy$$

$$\int\int_s \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int\int_s [x\,dy\,dz + (z^2 - z)\,dz\,dx - y dx\,dy]$$

$$= \int\int_{\Delta OBC} x\,dy\,dz + \int\int_{\Delta OAC} (z^2 - z)\,dz\,dx - \int\int_{\Delta OAB} y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2y} \left(2 - y - \frac{z}{2}\right) dy\,dz \quad \left(\because 2x + 2y + z = 4 \text{ से } x = 2 - y - \frac{z}{2}\right)$$

$$+ \int_0^2 \int_0^{4-2x} (z^2 - z)\,dz\,dx + \int_0^2 \int_0^{2-x} y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left|2z - yz - \frac{z^2}{4}\right|_0^{4-2y} dy + \int_0^2 \left|\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right|_0^{4-2x} dx + \int_0^2 \left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[2(4 - 2y) - y(4 - 2y) - \frac{1}{4}(4 - 2y)^2\right] dy$$

$$+ \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(4 - 2x)^3 - \frac{(4 - 2x)^2}{2}\right] dx + \int_0^2 \frac{(2 - x)^2}{2} dx$$

$$= \int_0^2 (y^2 - 4y + 4)\,dy + \int_0^2 \left[\frac{(4 - 2x)^3}{3} - \frac{(4 - 2x)^2}{2}\right] dx + \int_0^2 \frac{(2 - x)^2}{2} dx$$

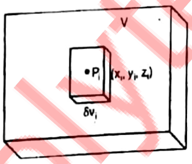
$$= \left|\frac{y^3}{3} - 2y^2 + 4y\right|_0^2 + \left|\frac{1}{3} \times \frac{(4 - 2x)^4}{4 \times (-2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(4 - 2x)^3}{3 \times (-2)}\right|_0^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{(2 - x)^3}{3 \times (-1)}\right|_0^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - \frac{1}{24}(0 - 256) + \frac{1}{12}(0 - 64) - \frac{1}{6}(0 - 8)$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{32}{3} - \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

उत्तर

5. आयतन समाकल (Volume Integral)



माना कि **F** कोई सतत सदिश बिन्दु फलन (continuous vector point function) है तथा V एक दिया हुआ आयतन है जो पृष्ठ $f = f(u, v)$ से परिबद्ध (enclosed) है। आयतन V को अनेक छोटे-छोटे $\partial v_1, \delta v_2, \delta v_3, \ldots, \delta v_n$ आयतनों के अवयवों में विभाजित करो। माना कि δv_i किसी एक उपक्षेत्र का आयतन है।

माना कि P_i, उपक्षेत्र δv_i में कोई बिन्दु है जिसका स्थिति सदिश **r** है। तब $\Sigma\, \mathbf{F}\cdot r_i \delta v_i$ उन सभी उपक्षेत्रों के आयतनों के योग को निरूपित करता है जिनमें आयतन V विभाजित है।

यदि उपक्षेत्रों की संख्या अनिश्चित रूप से बढ़ा दी जाए ($n \to \infty$) जिससे उपक्षेत्र δv_i का आयतन शून्य की ओर अग्रसर हो ($\delta v_i \to 0$) तो योगफल की सीमा को **F** (**r**) का क्षेत्र V में आयतन समाकल कहते हैं तथा इसे

$$\int_V \mathbf{F}(\mathbf{r})\,dv \text{ या } \int_V \mathbf{F}\cdot dv \text{ या } \int\int\int_V \mathbf{F} dv \text{ से निरूपित करते हैं।}$$

(1) आयतन समाकल $= \int\int\int_V \mathbf{F}\,dv$

(2) यदि $\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$ तब

$$\int\int\int \mathbf{F}\cdot dv = \mathbf{i}\int\int\int_V F_1\,dx\,dy\,dz + \mathbf{j}\int\int\int_V F_2\,dx\,dy\,dz + \mathbf{k}\int\int\int_V F_3\,dx\,dy\,dz$$

यह आयतन समाकल का कार्तीय रूप (cartesian form) है।

(3) आयतन समाकल की यह परिभाषा अदिश तथा सदिश दोनों प्रकार के फलनों पर लागू होती है।

(4) यदि ϕ एक अदिश फलन है तो ϕ के आयतन समाकल को $\int\int\int_V \phi\,dv$ से निरूपित करते हैं।

उदाहरण 11. $\int\int\int_v \mathbf{r}\cdot dv$ का मान ज्ञात करो जहाँ V वह आयतन है जो क्षेत्रों $x = 0, y = 0, x = 2, y = 2, z = x^2$, $z = 2$ से घिरा है।

हल : $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ तथा $dv = dx\,dy\,dz$

$$\int\int\int_v \mathbf{r}\,dv = \int\int\int_v (x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\,dx\,xy\,dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 \int_{x^2}^2 (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 \left|xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + \frac{z^2}{2}\mathbf{k}\right|_{x^2}^2 dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 \left[x(2 - x^2)\,\mathbf{i} + y(2 - x^2)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(4 - x^4)\,\mathbf{k}\right] dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left|(2x - x^3)\,y\,\mathbf{i} + (2 - x^2)\frac{y^2}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}(4 - x^4)\,y\,\mathbf{k}\right|_0^2 dx$$

$$= \int_0^2 [2(2x - x^3)\,\mathbf{i} + 2(2 - x^2)\,\mathbf{j} + (4 - x^4)\,\mathbf{k}]\,dx$$

$$= \left|2\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\mathbf{i} + 2\left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\mathbf{j} + \left(4x - \frac{x^5}{5}\right)\mathbf{k}\right|_0^2$$

$$= 2(4 - 4)\,\mathbf{i} + 2\left(4 - \frac{8}{3}\right)\mathbf{j} + \left(8 - \frac{32}{5}\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{8}{3}\mathbf{j} + \frac{8}{5}\mathbf{k} = \frac{8}{15}(5\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 12. यदि $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ तो $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dv$ तथा $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F}\, dv$ के मान ज्ञात करो जहाँ V, आयतज (cuboid) के फलकों से परिबद्ध है तथा $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$

हल : $$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div.}\, \mathbf{F} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) = 2x + 0 + y = 2x + y$$

तथा $$dv = dx\, dy\, dz$$

(i) $$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dv = \iiint_V (2x + y)\, dx\, dy\, dz = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (2x + y)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^b \left|2xz + yz\right|_0^c dy\, dx = \int_0^a \int_0^b (2cx + cy)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \left|2cxy + c\frac{y^2}{2}\right|_0^b dx = \int_0^a \left(2bcx + \frac{b^2c}{2}\right) dx$$

$$= \left|2bc\frac{x^2}{2} + \frac{b^2c}{2}x\right|_0^a = a^2bc + \frac{ab^2c}{2} = abc\left(\frac{2a + b}{2}\right)$$ उत्तर

(ii) $$\nabla \times \mathbf{F} = \text{curl}\, \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z & yz \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(z - 1) - \mathbf{j}(0 - 0) + \mathbf{k}(0 - 0) = \mathbf{i}(z - 1)$$

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{F}\, dv = \iiint_V (z - 1)\,\mathbf{i}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^a \int_0^b \int_0^c (z - 1)\,\mathbf{i}\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^b \left|\frac{z^2}{2} - z\right|_0^c \mathbf{i}\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{c^2}{2} - c\right) \mathbf{i}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \left|\frac{c^2}{2}y - cy\right|_0^b \mathbf{i}\, dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{bc^2}{2} - bc\right) \mathbf{i}\, dx = \left|\frac{bc^2}{2}x - bcx\right|_0^a \mathbf{i}$$

$$= \left(\frac{abc^2}{2} - abc\right)\mathbf{i} = abc\left(\frac{c}{2} - 1\right)\mathbf{i}$$ उत्तर

अभ्यासमाला 13

1. रेखा समाकल $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ C एक वक्र है जिसका पथ $x = 0$ से $x = 2$ तक वक्र $x^2 = 4y$, $3x^3 = 8z$ के अनुदिश है तथा $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

   संकेत : $\int_c \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_0^2 \left[3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right] \cdot (\mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz)$

   $= \int_0^2 [3x^2 dx + (2xz - y)\, dy + z\, dz]$, इसमें $y = \frac{x^2}{4}, dy = \frac{x}{2}dx, z = \frac{3x^3}{8}, dz = \frac{9x^2}{8}dx$ रखो।

2. $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का xy तल में बिन्दुओं (0, 0) से (2, 2) तक परवलय $x^2 = 4y$ के अनुदिश मान ज्ञात करो, यदि $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

3. $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = (x^2 + 3y)\,\mathbf{i} + (3y^2 - 2x)\,\mathbf{j}$ है तथा C, xy तल में वक्र का पथ बिन्दु (0, 0) से (3, 0) तथा (3, 0) से (5, 6) तक सरल रेखाएँ हैं।

4. वक्र C पर $\mathbf{F}$ का परिसंचारण (circulation) ज्ञात कीजिए यदि $F = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ तथा वक्र C, वृत्त $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ है।

5. $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो यदि $\mathbf{F} = x^2y^2\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ है तथा वक्र xy तल में, परवलय $y^2 = 4x$ का (0, 0) से (2, 2) तक का चाप है।

6. $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ तथा वक्र C का पथ एक त्रिभुज है जिसके शीर्ष (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0) हैं।

7. $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो यदि $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ तथा वक्र C का पथ O (0, 0, 0) से A (1, 0, 0), फिर A (1, 0, 0) से B (1, 1, 1) है।

8. $\int_c \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जबकि समाकल का पथ वक्र $x = t,\ y = t^2, z = t^3$ के अनुदिश मूल बिन्दु से बिन्दु (1, 1, 1) तक है तथा $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\,\mathbf{i} + 4yz\,\mathbf{j} + 6xzk$.

9. एक बल $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ एक कण को मूल बिन्दु से बिन्दु $(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ तक विस्थापित करता है। बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करो।

10. पृष्ठ समाकल $\iint_s \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, ds$ का मान ज्ञात करो यदि $\mathbf{F} = 4xz\,\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$ तथा पृष्ठ S, समतलों $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2,\ z = 0, z = 2$ से परिबद्ध (enclosed) है।

11. $\iint \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, ds$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = 6z\,\mathbf{i} - 4j + y\,\mathbf{k}$ तथा S समतल $3x + 2y + 6z = 12$ का वह भाग है जो प्रथम अष्टांक में स्थित है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

12. पृष्ठ समाकलन $\iint_s \mathbf{F} \cdot ds$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ तथा S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ (surface) है।

13. पृष्ठ समाकलन $\iint_s \mathbf{F} \cdot ds$ का मान ज्ञात करो यदि $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ तथा S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का प्रथम अष्टांक में स्थित भाग है।

14. $\iint_s \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - 2yz\mathbf{k}$ तथा S, $x = 0, y = 0, z = 0$ और समतल $x + y + z = 1$ से परिबद्ध चतुष्फलक है।

15. $\iint_s \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ तथा S, बेलन $x^2 + y^2 = 16$ का वह पृष्ठ है जो प्रथम अष्टांक में $z = 0$ तथा $z = 2$ द्वारा परिबद्ध है।

16. $\iiint_V (2xz\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3y^2\mathbf{k})\, dV$ का मान ज्ञात करो जहाँ V, पृष्ठों $x = 0, x = 2, y = 0, y = 4, z = x^2$, $z = 2$ द्वारा परिबद्ध आयतन है।

17. $\iiint_V dV$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\phi = 45x^2y$ तथा V समतलों $4x + 2y + z = 8, x = 0, y = 0, z = 0$ से परिबद्ध बन्द क्षेत्र है।

18. $\iiint \mathbf{F} \cdot dV$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ तथा V वह आयतन है जो $x = 0, y = 0, x = 2, y = 4, z = x^2$ तथा $z = 2$ पृष्ठों से घिरा है।

19. यदि $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$ तथा $\iiint \nabla \times \mathbf{F}\, dV$ के मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = 2x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ तथा V समतलों $x = 0, y = 0, z = 0$ तथा $2x + 2y + z = 4$ से परिबद्ध प्रदेश है।

20. $\int_s \mathbf{F} \cdot n\, ds$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $F = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$ और S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का तल (पृष्ठ) है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

21. दिखाइये कि $\iint_s (ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k})\, \hat{n}\, ds = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$, जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का सम्पूर्ण पृष्ठ है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)

उत्तरमाला 13

1. 16 2. 3 3. $\frac{683}{3}$ 4. $-\pi$ 5. 14 6. $\frac{1}{3}$ 7. $\frac{4}{3}$ 8. $\frac{33}{7}$
9. 1 10. 24 11. 32 12. 4π 13. $\frac{3}{8}$ 14. $\frac{1}{8}$ 15. 72
16. $\frac{16}{3}(16\mathbf{k} - \mathbf{i})$ 17. 128 18. $\frac{32}{15}(3\mathbf{i} + 5\mathbf{k})$ 19. 4; $\frac{4}{3}(\mathbf{k} - 2\mathbf{i})$ 20. $\frac{4\pi}{3}(a + b + c)$

14 ग्रीन, गौस तथा स्टोक के प्रमेय
(Green, Gauss's and Stoke's Theorem)

1. समतल में ग्रीन प्रमेय (Green's Theorem in the plane) :

xy समतल में यदि R कोई क्षेत्र (region) है जो सामान्य बन्द वक्र (simple closed curve) C से परिबद्ध (bounded) है और $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ एवम् इनके अवकल गुणांक $\frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}$ एक मानी सतत फलन (single valued continuous functions) हैं तब

याद करने योग्य बातें (Aid to Memory)

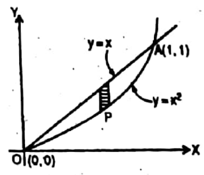
ग्रीन के प्रमेय के अनुसार, $$\oint_c (u\,dx + v\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

सदिश रूप (Vector form) में ग्रीन प्रमेय के अनुसार,
$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F})\, k\, dx\, dy$$
जहाँ $\mathbf{F} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$ तथा $k = x$-अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश है।

उपप्रमेय (Corollary)—किसी सरल संवृत्त वक्र C (simple closed curve) से परिबद्ध का क्षेत्रफल
$$A = \frac{1}{2}\oint_c (x\,dy - y\,dx)$$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. $\oint_c (xy + y^2)\,dx + x^2\,dy$ के लिए ग्रीन प्रमेय को सत्यापित करो जहाँ C एक संवृत्त (closed) वक्र है जो सरल रेखा $y = x$ तथा परवलय $y = x^2$ से परिबद्ध है।



हल : $y = x$ ...(1) तथा $y = x^2$ ...(2)

(1) तथा (2) को हल करने पर, $O(0, 0)$ तथा $A(1, 1)$ रेखा तथा वक्र के कटान बिन्दु हैं। वक्र C, धन पाद में $OPAO$ है जोकि चित्र में दिखाया गया है।

परवलय $y = x^2$ के अनुदिश, समाकल

$$I = \int_0^1 (x \times x^2 + x^4)\,dx + x^2 \times 2x\,dx \quad (y = x^2 \text{ तथा } dy = 2x\,dx \text{ रखने पर})$$

$$= \int_0^1 (x^3 + x^4)\,dx + 2x^3\,dx = \int_0^1 (3x^3 + x^4)\,dx$$

$$= \left|3 \times \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

रेखा $y = x$ के अनुदिश, A से O तक समाकल

$$= \int_1^0 (x \times x + x^2)\, dx + x^2 dx \quad (y = x \text{ तथा } dy = dx \text{ रखने पर})$$

$$= -\int_0^1 3x^2\, dx = -3 \times \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = -1$$

$\therefore$ दिया हुआ समाकल $= \frac{19}{20} - 1 = \frac{-1}{20}$ ...(3)

ग्रीन प्रमेय से समाकल,

$$\oint_c (u\, dx + v\, dy) = \int\int_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$= \int\int_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2)\right] dx\, dy$$

$$= \int\int_R (2x - x - 2y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x - 2y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left|xy - \frac{2y^2}{2}\right|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 [(x^2 - x^2) - (x^3 - x^4)]\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 - x^3)\, dx = \left|\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{20} \quad ...(4)$$

अत: (3) तथा (4) से ग्रीन प्रमेय सत्यापित होती है।

उदाहरण 2. यदि एक सदिश क्षेत्र $\mathbf{F} = (\sin y)\,\mathbf{i} + x(1 + \cos y)\,\mathbf{j}$, $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ C, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ है।

हल: $$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c [(\sin y)\,\mathbf{i} + x(1 + \cos y)\,\mathbf{j}] \cdot (\mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy)$$

$$= \int_c \sin y\, dx + x(1 + \cos y)\, dy$$

ग्रीन प्रमेय से,

$$\oint_c (u\, dx + v\, dy) = \int\int_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$\Rightarrow \int \sin y\, dx + x(1 + \cos y)\, dy = \int\int_s \left(\frac{\partial}{\partial x} x(1 + \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}\sin y\right) dx\, dy$$

$$= \int\int_s (1 + \cos y - \cos y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{\frac{-b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} 1 \cdot dy\, dx = \int_{-a}^{a} |y|_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= 2\frac{b}{a} \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 4\frac{b}{a} \times \left|\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right|_0^a$$

$$= \frac{4b}{a}\left[(0 - 0) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\right] = \pi ab$$

$\Rightarrow \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi ab$ उत्तर

उदाहरण 3. ग्रीन के प्रमेय से $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = y^3\,\mathbf{i} - x^3\,\mathbf{j}$ तथा $C : x^2 + y^2 = a^2, z = 0$

हल: $$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (y^3\,\mathbf{i} - x^3\,\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy) = \int y^3\, dx - x^3\, dy$$

$$\Rightarrow u = y^3, v = -x^3, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 - 3y^2$$

ग्रीन के प्रमेय से,

$$\int u\, dx + v\, dy = \int\int_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$\Rightarrow \int y^3\, dx - x^3\, dy = -3\int\int_s (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ dx\, dy = r\, d\theta\, dr$ रखने पर

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \cdot r\, d\theta\, dr$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^a (r^3\, dr)\, d\theta = -3\int_0^{2\pi} \left|\frac{r^4}{4}\right|_0^a d\theta$$

$$= -\frac{3}{4}a^4 \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta = -\frac{3}{4}a^4 |\theta|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot a^4 \cdot 2\pi = -\frac{3}{2}\pi a^4$$ उत्तर

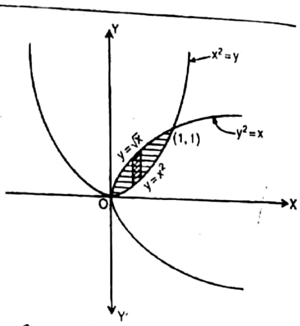
उदाहरण 4. xy समतल में $\int_c (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$ का ग्रीन प्रमेय के प्रयोग से मान ज्ञात करो जहाँ C, वक्र परवलयों $y = \sqrt{x}$ तथा $y = x^2$ से परिबद्ध है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल : $u = 3x^2 - 8y^2, \quad v = 4y - 6xy$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -16y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -6y$$



$$\int (u\,dx + v\,dy) = \iint_c \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-6y + 16y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left|10 \times \frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx\,dy$$

$$= \int_0^1 5(x - x^4)\,dx = 5\left|\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{2}$$

उत्तर

2. गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय (Gauss's Divergence Theorem) :

यदि कोई आयतन V किसी संवृत्त पृष्ठ (closed surface) S से परिबद्ध है तथा **F** आयतन V में एक सतत् अवकलनीय सदिश बिन्दु फलन (continuous and differentiable vector point function) है, तब गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय के अनुसार,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} \cdot ds = \iiint_V \text{div} \cdot \mathbf{F} \cdot dV \quad \ldots(1)$$

जहाँ $\hat{n}$, पृष्ठ S पर बाह्य दिशा में खींचा गया एकांक अभिलम्ब सदिश (outward unit normal vector) है।

3. गौस प्रमेय का कार्तीय रूप (Cartesion Form of Gauss's Theorem) :

माना कि $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, $\because v = xyz \;\therefore\; dx = dx\,dy\,dz$

$$\text{div}.\mathbf{F} = \nabla . F = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\iint_S \mathbf{F} . \hat{n}\,dx = \iint_S F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy$$

अत: समीकरण-(1) से,

$$\Rightarrow \iint_S (F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy) = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

जो गौस प्रमेय का कार्तीय रूप (cartesian form) है। F_1, F_2, F_3, xyz में अदिश फलन हैं। $\hat{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ है जहाँ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, $\hat{n}$ की दिक्कोज्याएँ (direction cosines) हैं।

4. गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय से निगमन (Deductions from Gauss's Theorem) :

निम्न तीन अन्य प्रकार के पृष्ठ समाकलों को भी आयतन समाकलों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है—

(i) $\iint_S \hat{n} . \mathbf{F} . ds = \iiint_V \nabla . \mathbf{F}\,dV$

(ii) $\iint_S \hat{n} \times \mathbf{F}\,ds = \iiint_V \nabla \times \mathbf{F}\,dV$

(iii) $\iint_S \hat{n} . \phi\,ds = \iiint_V \nabla \times \phi\,dV$

स्पष्ट है कि उपरोक्त तीनों परिणाम $\hat{n}$ के स्थान पर ∇ रखकर प्राप्त किए जा सकते हैं।

उदाहरण 5. गौस डाइवर्जेन्स प्रमेस से सिद्ध करो कि $\iint_S \mathbf{r} . \mathbf{n}\,ds = 3V$ जहाँ S एक संवृत्त पृष्ठ है तथा आयतन V, संवृत्त पृष्ठ S से परिबद्ध (closed) है।

हल : गौस के डाइवर्जेन्स प्रमेय से,

$$\iint_S \mathbf{r} . \mathbf{n}\,ds = \iiint_V \nabla . \mathbf{r}\,dV$$

$$= \iiint_V \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\,dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV$$

$$= \iiint_V (1 + 1 + 1)\,dV = \iiint 3dV$$

$= 3V$, जहाँ V, S से घिरा आयतन है। इति सिद्धम्

उदाहरण 6. $\iint_S \mathbf{F} . \hat{n}\,dS$ का मान ज्ञात कीजिए

जहाँ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ का पृष्ठ है तथा $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$

हल : गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय से,

$$\iint_S \mathbf{F} . \hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla . \mathbf{F}\,dv \quad \ldots(1)$$

$\because \mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} \quad \therefore F_1 = 2x, F_2 = 3y, F_3 = 4z$ (दिया है)

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla . \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(4z) = 2 + 3 + 4 = 9$$

यह मान (1) में रखने पर

$$\iint_S \mathbf{F} . \hat{n}\,dS = \iiint_V 9\,dV = 9V$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

जहां V = गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (3)^3 = 36\pi$

$$\Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, dS = 9V = 9 \times 36\pi = 324\pi$$ उत्तर

उदाहरण 7. $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, ds$ का मान ज्ञात करो, जहाँ $\mathbf{F} = (3x + 2y)\,\mathbf{i} + (4y - 2z)\,\mathbf{j} + (x^2 - 6z)\,\mathbf{k}$ है तथा S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z - 8 = 0$ का पृष्ठ है।

हल : गौस डाइवर्जैन्स प्रमेय से,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV$$

$$\mathbf{F} = (3x + 2y)\,\mathbf{i} + (4y - 2z)\,\mathbf{j} + (x^2 - 6z)\,\mathbf{k}$$

$$F_1 = 3x + 2y,\; F_2 = 4y - 2z,\; F_3 = x^2 - 6z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x + 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(4y - 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - 6z)$$

$$= 3 + 4 - 6 = 1$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, ds = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \iiint_V 1\,.\, dV$$

$$= V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (गोले का आयतन)} = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$ उत्तर

नोट : गोले का समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z - 8 = 0$

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d} = \sqrt{4 + 9 + 4 + 8} = 5$$

उदाहरण 8. $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, dS$ का मान ज्ञात करो, जहाँ $F = 4xz\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$ तथा S, उस घन का पृष्ठ है जो समतलों $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ से घिरा है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

हल :

$$\mathbf{F} = 4xz\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(4xz\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(4xz) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= 4z - 2y + y = 4z - y$$

गौस के डाइवर्जैन्स प्रमेय से,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, ds = \iiint_V \nabla\cdot F\, dV = \iiint_V (4z - y)\, dV$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z - y)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left|2z^2 - yz\right|_0^1 dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2 - y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left|2y - \frac{y^2}{2}\right|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}$$ उत्तर

उदाहरण 9. गौस डाइवर्जैन्स प्रमेय के कार्तीय रूप (cartesian form) का प्रयोग कर

$$I = \iint_S (2x^3\, dy\, dz + 3x^2y\, dz\, dx - x^2z\, dx\, dy)$$

का मान ज्ञात करो, जहाँ S एक संवृत्त पृष्ठ है जो समतलों $z = 0, z = b$ और बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ से परिबद्ध है।

हल :

$$I = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2z)\right] dv$$

$$= \iiint_V (6x^2 + 3x^2 - x^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V 8x^2\, dx\, dy\, dz$$

$$= 8\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^b x^2\, dx\, dy\, dz$$

$$= 8\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left|x^2z\right|_0^b dx\, dy$$

$$= 8\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} bx^2\, dx\, dy$$

$$= 8b\int_{-a}^{a} \left|x^2y\right|_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 8b\int_{-a}^{a} 2x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 16b\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 32b\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$x = a\sin\theta$, $\quad dx = a\cos\theta\, d\theta$, सीमाएँ 0 to $\frac{\pi}{2}$ रखने पर

$$= 32b\int_a^{\pi/2} a^2\sin^2\theta \times a\cos\theta \times a\cos\theta\, d\theta$$

$$= 32a^4b\int_a^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$= 8a^4 b \int_a^{\pi/2} 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta = 8a^4 b \int_a^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$= 8a^4 b \int_a^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta = 4a^4 b \left| \theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right|_0^{\pi/2}$$

$$= 4a^4 b \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - (0 - 0) \right] = 2a^4 b\pi$$

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

5. स्टोक का प्रमेय (Stoke's Theorem) :

यदि **F** एक सतत् अवकलनीय सदिश फलन (continuous and differentiable vector function) है तथा S कोई पृष्ठ है जो वक्र C से परिबद्ध (bounded) है, तब स्टोक के प्रमेय के अनुसार

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, ds$$

$$\Rightarrow \quad \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{n} \, dS \quad (\because \text{curl} = \nabla \times \mathbf{F})$$

जहाँ $\hat{n} = \mathbf{i} \cos\alpha + \mathbf{j} \cos\beta + \mathbf{k} \cos\gamma$ एकक अभिलम्ब सदिश (unit normal vector) है जो पृष्ठ S के किसी बिन्दु पर धन दिशा में खींचा गया है।

6. स्टोक के प्रमेय का कार्तीय रूप (Cartesian Form of Stoke's Theorem) :

स्टोक प्रमेय को कार्तीय रूप में निम्न प्रकार से निरूपित कर सकते हैं—

$$\oint_c (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \iint_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dz\, dx + \left(\frac{dF_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy$$

जहाँ $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$

उदाहरण 10. $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2 \mathbf{j} - y^2 z \mathbf{k}$ के लिए स्टोक के प्रमेय को सत्यापित करो, जहाँ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के पृष्ठ का ऊपरी अर्द्ध भाग है तथा वक्र C से परिबद्ध (bounded) है।

हल: $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2 \mathbf{j} - y^2 z \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (2x - y\mathbf{i} - yz^2 \mathbf{j} - y^2 z \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz)$$

$$= (2x - y)\, dx - yz^2\, dy - y^2 z\, dz \quad \ldots(1)$$

यहाँ पृष्ठ S की परिसीमा (boundary) वृत्त C है जो xy समतल में है तथा इस वृत्त का केन्द्र (0, 0) और त्रिज्या = 1 है, अतः वृत्त का प्राचल समीकरण (parametric equation)

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi, \quad z = 0 \text{ है, जहाँ } 0 \le \phi \le 2\pi$$

$$\Rightarrow \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c (2x - y)\, dx - yz^2\, dy - y^2 = dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos\phi - \sin\phi)(-\sin\phi\, d\phi) - 0 - 0 \quad (\because z = 0, dx = -\sin\phi\, dQ)$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\phi - 2\sin\phi \cos\phi)\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1 - \cos 2\phi}{2} - \sin 2\phi \right] d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \left| \phi - \frac{\sin 2\phi}{2} + \frac{\cos 2\phi}{2} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(2\pi - 0) - (0 - 0) + \left(\frac{1 - 1}{2} \right) \right] = \pi \quad \ldots(2)$$

स्टोक के प्रमेय से, $\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{कर्ल } \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, ds \quad \ldots(3)$

$$\text{कर्ल } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(-2yz + 2yz) - \mathbf{j}(0 - 0) + \mathbf{k}(0 + 1) = K$$

कर्ल **F** का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{k} \cdot \hat{n}\, ds = \iint \mathbf{k} \cdot \hat{n} \cdot \frac{dx\, dy}{\hat{n}\, k}$$

$$= \iint dx\, dy = \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi \times 1^2 = \pi \quad \ldots(4)$$

(3) तथा (4) के परिणामों से स्टोक का प्रमेय सत्यापित होता है।

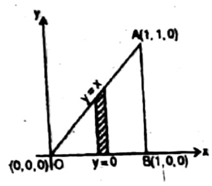
उदाहरण 11. स्टोक प्रमेय के प्रयोग से $\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो, जहाँ $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} - (x + z)\mathbf{k}$ है तथा C, त्रिभुजीय परिसीमा (boundary) है जिसके शीर्ष (0, 0, 0), (1, 0, 0) तथा (1, 0, 0) हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)

हल: स्टोक के प्रमेय से, $\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_s (\nabla \times \mathbf{F})\, ds \quad \ldots(1)$

$$\text{कर्ल} \quad \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & -(x + z) \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(0 - 0) - \mathbf{j}(-1 - 0) + \mathbf{k}(2x - 2y)$$

$$= \mathbf{j} + 2(x - y)\mathbf{k}$$



$\because$ त्रिभुज के तीनों शीर्षों पर $z = 0$ है अतः त्रिभुज xy तल में है $\Rightarrow \hat{n} = \mathbf{k}$

$\therefore$ कर्ल $\mathbf{F} \cdot \hat{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{n} = [\mathbf{j} + 2(x - y)\mathbf{k}]\mathbf{k} = 2(x - y)$

चित्र में केवल XY तल दिखाया गया है।

रेखा OA का समीकरण $y = x$ है।

$$\Rightarrow \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \int_0^x 2(x - y)\, dx\, dy = 2\int_0^1 \left| xy - \frac{y^2}{2} \right|_0^x dx$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$= 2\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$ उत्तर

प्रश्न 12. $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j}$ के लिए स्टोक प्रमेय द्वारा $\oint_c \mathbf{F} . d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ c, आयत $x = \pm a, y = 0, y = b$ की परिसीमा (boundary) है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

हल:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & -2xy & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(-2y-2y) = -4y\mathbf{k}$$

$$\therefore (\nabla \times \mathbf{F}) . \hat{n} = (-4y\mathbf{k}) . \mathbf{k} = -4y \qquad (\because \hat{n} = k)$$

$$\oint_c \mathbf{F} . d\mathbf{r} = \iint_c (\nabla . \mathbf{F}) . \hat{n} . ds$$

$$= \iint_c -4y\,dx\,dy = -4\int_{-a}^{a} \int_0^b y\,dx\,dy$$

$$= -4\int_{-a}^{a} \left|\frac{y^2}{2}\right|_0^b dx = -2b^2 \int_{-a}^{a} 1 . dx$$

$$= -4b^2 \int_0^a 1 . dx = -4b^2 . |x|_0^a = -4ab^2$$ उत्तर

अभ्यासमाला 14

1. ग्रीन प्रमेय की सहायता से $\int_c (x^3 - xy)\,dx + (x^2 - y^3)\,dy$ का मान ज्ञात करो, जहाँ C एक वर्ग है जिसके शीर्ष $(1, 1)\ (-1, 1), (-1, -1)$ तथा $(1, -1)$ हैं।

2. ग्रीन प्रमेय के प्रयोग से $\int_c (2x\,dy - 3y\,dx)$ का मान ज्ञात करो, जहाँ C एक वर्ग है जिसके सिरे $(0, 2), (2, 0), (-2, 0)$ तथा $(0, -2)$ हैं।

3. यदि $\mathbf{F} = \sin y\,\mathbf{i} + x(1 + \cos y)\,\mathbf{j}$, तो ग्रीन प्रमेय की सहायता से $\int_c \mathbf{F} . d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करें, जहाँ C एक वृत्ताकार पथ है जिसका समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ है। (संकेत: देखो उदाहरण 2)

4. $\int_c \mathbf{F} . d\mathbf{r}$ का मान ग्रीन की प्रमेय के प्रयोग से ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = \cos y\,\mathbf{i} + x(1 - \sin y)\,\mathbf{j}$, जहाँ $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ तथा $C : x^2 + y^2 = 1, z = 0$

5. $\int \mathbf{F} . \mathbf{n}\,ds$ का मान ज्ञात कीजिए, जब $\mathbf{F} = ax\,\mathbf{i} + by\,\mathbf{j} + cz\,\mathbf{k}$ और S, गोले में $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 06)

6. ग्रीन प्रमेय की सहायता से $\int_c e^{-x}(\sin y\,dx + \cos y\,dy)$ का मान ज्ञात करो जहाँ C एक आयत है जिसके शीर्ष $(0, 0), (\pi, 0), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ हैं।

7. समाकल $\int_c (x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy$ के लिए ग्रीन प्रमेय को सत्यापित कीजिए जहाँ C, वृत्त $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$ से परिबद्ध है।

8. गौस प्रमेय के प्रमेय से $\iint_s \mathbf{r} . \hat{n} . ds$ का मान ज्ञात करो, यदि S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ का पृष्ठ है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

9. $\mathbf{F} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ के लिए गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय सत्यापित करो जहाँ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का पृष्ठ है।

10. ग्रीन प्रमेय के प्रयोग से $\int_c (x^2 - y^2)\,dx - 4xy\,dy$ का मान ज्ञात करो जबकि C, xy तल में $y^2 = 4x, y = 0$, तथा $x = 1$ से परिबद्ध है।

11. गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय के प्रयोग से $\iint_s (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + zk) . \hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात करो जहाँ S, समतलों $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = a$ से परिबद्ध घन का पृष्ठ है। इसे सीधे समाकलित कर गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय को सत्यापित भी कीजिए।

12. $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$ के लिए गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय सत्यापित करो जहाँ S, घन $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ से परिबद्ध क्षेत्र है।

13. $\iint_s (y^2z^3\,\mathbf{i} + z^2x^3\,\mathbf{j} + x^2y^3\,\mathbf{k}) . ds$ का मान ज्ञात करो जहाँ S, समतल $z = 0$ के ऊपर गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का वक्र पृष्ठ है।

14. कार्तीय रूप में गौस डाइवर्जेन्स के प्रमेय से $\iint_s (x^3 - yz)\,dy\,dz - 2x^2y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$ का मान ज्ञात करो जहाँ S, निर्देशांक समतलों तथा समतलों $x = y = z = a$ से परिबद्ध है।

15. स्टोक प्रमेय द्वारा $\oint_c \mathbf{F} . d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j}$ तथा C, आयत $x = \pm a, y = 0$ तथा $y = b$ की परिसीमा (boundary) है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

16. स्टोक प्रमेय के प्रयोग से $\int_c xy\,dx + xy^2\,dy$ का मान ज्ञात करो जहाँ C, xy समतल में एक वर्ग है जिसके शीर्ष $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ तथा $(0, -1)$ हैं।

17. स्टोक प्रमेय के प्रयोग से $\int_c y\,dx + z\,dy + x\,dz$ का मान ज्ञात करो जहाँ C, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ तथा समतल $x + z = a$ का परिच्छेदित (intersected) वृत्त है।

18. स्टोक प्रमेय से सिद्ध करो कि $\oint_c (e^x\,dx + 2y\,dy - dz) = 0$ जहाँ C, वक्र $x^2 + y^2 = 4, z = 2$ है।

19. स्टोक प्रमेय के प्रयोग से $\oint_c \mathbf{F} . d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ C एक त्रिभुज है जिसके शीर्ष $(0, 0, 0), (0, 2, 0)$ तथा $(1, 1, 1)$ हैं।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

20. स्टोक प्रमेय से $\oint \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\mathbf{F} = y(x^2+y^2)\mathbf{i} - x(x^2+y^2)\mathbf{j}$ है तथा परिसीमा (boundary) एक आयत है जिसके शीर्ष (0, 0, 0), (1, 0, 0) (0, 1, 1) तथा (1, 1, 1) हैं।

21. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6}$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

संकेत: $x^6 = y$ रखने पर, $6x^5\,dx = dy$ तथा $x = y^{1/6}$ $I = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{6x^5\,dy}{x^4(1+y)} = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{dy}{y^{4/6}(1+y)}$

$$I = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{-2/3}}{1+y}dy = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{1/3-1}}{1+y}dy = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\sin \pi/3}\right) = \frac{1}{6}\times\frac{\pi\times 2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$ उत्तर

22. स्टाक प्रमेय की सहायता से निम्न का मान ज्ञात करो—

$$\int_c yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$$ जबकि C वक्र $x^2+y^2=1,\ z=y^2$ है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

संकेत: $$\text{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{i}(x-x) - \mathbf{j}(y-y) + \mathbf{k}(z-z) = 0$$

स्टाक के प्रमेय से, $\oint \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int \text{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = 0$ $(\because \text{curl}\,\mathbf{F} = 0)$

23. $\int_c \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ का मान ज्ञात करो, जब $\mathbf{F} = x^2y^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ तथा $C, y^2 = 4x$ (0, 0) से (4, 4) तक xy समतल में है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

24. यदि $\mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, $\int_s \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S घन की सतह है जिस की सीमायें $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 2010)

25. सिद्ध कीजिए— $\int_c \phi\nabla\psi.d\mathbf{r} = \int_s \nabla\phi\,\nabla_\psi.\hat{n}\,ds$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

उत्तरमाला 14

1. 0	2. 40	3. πa^2	4. π	5. $\frac{4}{3}\pi(a+b+c)$
6. $2(e^{-\pi}-1)$	7. $-\frac{8}{3}$	8. 108π	9. $\frac{12\pi a^5}{5}$	10. -2
11. $3a^3$	12. $\frac{3}{2}$	13. $\frac{\pi a^8}{64}$	14. $\frac{a^5}{3}+a^3$	15. $-4ab^2$
16. $\frac{4}{3}$	17. $-\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$	19. 1	20. $-\frac{8}{3}$	21. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
21. 0	23. $\frac{1025}{4}$	24. $\frac{3}{2}$		

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

खण्ड-4

समाकलन गणित

(INTEGRAL MATH)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

15

लाप्लास रूपान्तर
(Laplace Transforms)

1. लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transforms) :

यदि $F(t)$, t के धनात्मक मानों का कोई फलन है तब $\int_0^\infty e^{-st} \cdot F(t)\,dt$ को फलन $F(t)$ का लाप्लास रूपान्तर कहते हैं और इसे $f(s)$ से प्रदर्शित करते हैं।

अतः
$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot F(t)\,dt = f(s) \quad ...(1)$$

$L\{F(t)\}$ का अर्थ है, फलन $F(t)$ का लाप्लास रूपान्तर जो नई चर राशि या प्राचल (parameter) s का फलन होता है ओर इसका अस्तित्व (existance) तभी है जब (1) का समाकलन, s के कुछ मानों क लिए अभिसारी (convergent) है। लाप्लास रूपान्तर का प्रयोग अवकल समीकरणों को हल करने में किया जाता है। लाप्लास रूपान्तर, अवकल समीकरण को बीजीय समीकरण (algebrical equation) में परिवर्तित कर देता है, जिन्हें सुगमता से हल कर लिया जाता है।

2. कुछ मुख्य फलनों के लाप्लास रूपान्तर :

(1) फलन $F(t) = 1$ का लाप्लास रूपान्तर— (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

$$L\{F(t)\} = L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\,dt = \left|\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{e^{-\infty} - e^0}{-s} = \frac{-1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$\therefore \quad L\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{(सूत्र)}$$

(2) फलन $F(t) = t$ का लाप्लास रूपान्तर—

$$L\{F(t)\} = L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t\,dt = \left|\frac{t \cdot e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1 \cdot e^{-st}}{-s}\,dt \quad \text{(खण्डशः समाकलन से)}$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s} \cdot \left|\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{e^{-\infty} - e^0}{-s}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{0-1}{-s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

(3) फलन $F(t) = t^2$ का लाप्लास रूपान्तर—

$$L\{F(t)\} = L(t^2) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^2\,dt = \left|\frac{t^2 \cdot e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty - \int_0^\infty 2t \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\,dt \quad \text{(खण्डशः समाकलन से)}$$

$$= 0 + \frac{2}{s}\int_0^\infty t\,e^{-st}\,dt = \frac{2}{s}\left[\left|\frac{t \cdot e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1 \cdot e^{-st}}{-s}\right] \quad \text{(पुनः खण्डशः समाकलन से)}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$= \frac{2}{s}\left[0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt\right] = \frac{2}{s^2} \times \left|\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{2}{s^2}\left[\frac{e^{-\infty} - e^0}{-s}\right]$$

$$= \frac{2}{s^2}\left[\frac{0-1}{-s}\right] = \frac{2}{s^3} = \frac{2!}{s^3}$$ (सूत्र)

(4) फलन $F(t) = t^n$ का लाप्लास रूपान्तर—

$$L\{F(t)\} = L(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t^n\,dt$$

$$= \left|t^n \frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty - \int_0^\infty nt^{n-1}\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$ (खण्डश: समाकलन से)

$$= 0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\cdot e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty \cdot e^{-st}\,dt$$ [(n – 1) बार और खण्डश: समाकलन करने पर]

$$= \frac{n!}{s^n}\cdot\left|\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{n!}{s^n}\left[\frac{e^{-\infty} - e^0}{-s}\right] = \frac{n!}{s^n}\cdot\left[\frac{0-1}{-s}\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

अत: $$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$ (सूत्र)

(5) फलन $F(t) = e^{at}$ का लाप्लास रूपान्तर— (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

$$L\{F(t)\} = L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \left|\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{e^{-\infty} - e^0}{-(s-a)} = \frac{0-1}{-(s-a)} = \frac{1}{(s-a)}$$

अत: $$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$ (सूत्र)

(6) फलन $F(t) = \cos at$ तथा $F(t) = \sin at$ का लाप्लास रूपान्तर— (उ० प्र० डिप्लोमा 1994)

माना कि $F(t) = e^{iat}$

$$L\{F(t)\} = L(e^{iat}) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{iat}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-ia)t}\,dt = \left|\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{e^{-\infty} - e^0}{-(s-ia)} = \frac{0-1}{-(s-ia)} = \frac{1}{(s-ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

$$L\{e^{iat}\} = L\{\cos at + i\sin at\} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\cdot\frac{a}{s^2+a^2}$$

दोनों ओर की तुलना करने पर, $$L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$ (सूत्र)

$$L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$ (सूत्र)

(7) फलन $F(t) = \cosh at$ तथा $\sinh at$ का लाप्लास रूपान्तर—

$$L\{F(at)\} = L\{\sinh at\} = L\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L(e^{at}) - \frac{1}{2}\cdot L(e^{-at})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}$$

∴ $$L(\sinh at) = \frac{a}{s^2-a^2}$$ (सूत्र)

इसी प्रकार, $$L(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$$ (सूत्र)

उपरोक्त फलनों के लाप्लास रूपान्तरों को आगे तालिकाबद्ध कर दिया गया है और इन रूपान्तरों का हम प्रश्नों में सूत्रों के रूप में प्रयोग कर सकते हैं। अत: विद्यार्थी इन्हें कण्ठस्थ कर लें।

3. मानक फलनों के लाप्लास रूपान्तर की तालिका (Laplace Transforms of Standard Functions) :

नीचे मानक फलनों के लाप्लास रूपान्तरों को तालिकाबद्ध किया गया है। विद्यार्थीगण इन्हें कण्ठस्थ कर लें।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

Sl. N.	$F\{t\}$	$L\{F(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$
3.	$t^n, n \geq 0$ (n धनात्मक पूर्णांक है)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
4.	$t^n, n > -1$ (n वास्तविक तथा -1 से बड़ा है।)	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $s > 0$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > 0$
6.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
7.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > 0$
8.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
9.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4. लाप्लास रूपान्तर के कुछ मुख्य गुण (Some Important Properties of Laplace Transform) :

(1) रैखिक गुण (Linear Property) : लाप्लास रूपान्तर रैखिक रूपान्तर है, अर्थात्

$$L\{C_1F_1(t) \pm C_2F_2(t)\} = C_1L\{F_1(t)\} \pm C_2L\{F_2(t)\} = C_1f_1(s) \pm C_2f_2(s)$$

उदाहरण 1. यदि $F(t) = 2e^{2t} + 3t^3 - 5\cos 2t + 2\sin 4t$, $L\{F(t)\}$ ज्ञात करो।

हल :
$$L\{2e^{2t} + 3t^3 - 5\cos 2t + 2\sin 4t\}$$
$$= 2L(e^{2t}) + 3L(t^3) - 5L(\cos 2t) + 2L(\sin 4t)$$
$$= 2\cdot\frac{1}{s-2} + 3\cdot\frac{3!}{s^4} - 5\cdot\frac{s}{s^2+2^2} + 2\cdot\frac{4}{s^2+4^2}$$
$$= \frac{2}{s-2} + \frac{18}{s^4} - \frac{5s}{s^2+4} + \frac{8}{s^2+16}$$ उत्तर

उदाहरण 2. $L\{\sin^2 at\}$ ज्ञात करो।

हल :
$$L\{\sin^2 at\} = L\left\{\frac{1-\cos 2at}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{\cos 2at\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4a^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4a^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2+4a^2-s^2}{s(s^2+4a^2)} = \frac{2a^2}{s(s+4a^2)}$$ उत्तर

(2) प्रथम स्थानान्तरी गुण (First Shifting Property) :

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तब $L\{e^{at}F(t) = f(s-a)\}$

उदाहरण 3. (i) $L\{e^{4t}\cdot t^2\}$ (ii) $L\{e^{-3t}\cos 4t\}$ के लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

हल : (i) $\because L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3}$ $\therefore L\{e^{4t}\cdot t^2\} = \frac{2!}{(s-4)^3}$ (उपरोक्त गुण के प्रयोग से) उत्तर

(ii) $\because L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+4^2}$

$$\therefore L\{e^{-3t}\cos 4t\} = \frac{s+3}{(s+3)^2+16} = \frac{s+3}{s^2+6s+25}$$ उत्तर

(3) द्वितीय स्थानान्तरी गुण (Second Shifting Property) :

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तथा $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & \text{for } t > a \\ 0, & \text{for } t < 0 \end{cases}$

तब $L\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$

उदाहरण 4. $L\{F(t)\}$ ज्ञात करो यदि $F(t) = \begin{cases} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right), & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0, & t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

हल : $\because L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$

$$\therefore L\{F(t)\} = L\left\{\cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)\right\} = e^{-2\pi s/3}\cdot L(\cos t)$$ (द्वितीय स्थानान्तरी गुण से)

$$= e^{-2\pi s/3}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$ उत्तर

उदाहरण 5. $L\{F(t)\}$ ज्ञात करो यदि $F(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & \text{for } t > 1 \\ 0, & \text{for } 0 < t < 1 \end{cases}$

हल : $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3}$

$$\therefore L\{F(t)\} = L\{(t-1)^2\} = e^{-s}\cdot L\{t^2\} = e^{-s}\cdot\frac{2!}{s^3}$$ उत्तर

(4) पैमाना परिवर्तन गुण (Change of Scale Property) :

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तब $L\{F(at)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right)$

उदाहरण 6. (i) $\because L\{(e^{4t})\} = \frac{1}{s-4}$ $\therefore L\{e^{4at}\} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{a}-4\right)} = \frac{1}{s-4a}$

(ii) $\because L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}$

$$\therefore L\{\cos 12t\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{s/3}{(s/3)^2+16} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9s}{3(s^2+144)} = \frac{s}{s^2+144}$$ उत्तर

नोट—$L\{e^{4at}\}$ तथा $L\{\cos 12t\}$ के मान $L\{e^{at}\}$ तथा $L\{\cos at\}$ के सूत्रों से सीधे भी ज्ञात किये जा सकते हैं।

5. अवकल गुणांकों के लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Derivatives) :

(1) प्रथम अवकल गुणांक का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of First Derivative)—

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$

तब $L\{F'(t)\} = s\cdot L\{F(t)\} - F(0) = s\cdot f(s) - F(0)$

अतः $L\{F'(t)\} = s\cdot f(s) - F(0)$ (सूत्र)

(2) द्वितीय अवकल गुणांक का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Second Derivative)—

यदि $L\{F''(t)\} = s\cdot L\{F'(t)\} - F'(0)$

तब $L\{F''(t)\} = s\cdot[sf(s) - F(0)] - F'(0)$

$\Rightarrow$ $L\{F''(0)\} = s^2f(s) - sF(0) - F'(0)$ (सूत्र)

(3) तीसरे अवकल गुणांक का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Third Derivative)—

यदि $L\{F'''(t)\} = s\cdot L\{F''(t)\} - F''(0)$

तब $L\{F'''(t)\} = s\cdot[s^2f(s) - s\cdot F(0) - F'(0)] - F''(0)$

$\Rightarrow$ $L\{F'''(t)\} = s^3f(s) - s^2F(0) - sF'(0) - F''(0)$ (सूत्र)

(4) n वें अवकल गुणांक का लाप्लास रूपान्तर (Laplace transform of nth Derivative)—

$$L\{F^n(t)\} = s^nf(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \ldots - F^{n-1}(0)$$ (सूत्र)

उदाहरण 7. यदि $F(t) = t^4$ तो $[F'''(t)]$ ज्ञात करो।

हल : $L\{F(t)\} = L\{t^4\} = \frac{4!}{s^5}$ $\therefore f(s) = \frac{4!}{s^5}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - sF'(0) - F''(0)$$ सूत्र

$\because F(t) = t^4 \therefore F(0) = 0, F'(t) = 4t^3 \therefore F'(0) = 0, F''(t) = 12t^2 \therefore F''(t) = 0$

$$L\{(t^4)'''\} = s^3 \cdot \frac{4!}{s^5} - s^2 \times 0 - s \times 0 - 0 = \frac{24}{s^2}$$ उत्तर

उदाहरण 8. यदि $F(t) = \cos at$ तो $F'''(t)$ ज्ञात करो।

हल : $L\{F(t)\} = L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \therefore f(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$

$\because F(t) = \cos at \therefore F(0) = \cos 0° = 1, F'(t) = -a \sin at \therefore F'(0) = -a \sin 0° = 0$

$F''(t) = -a^2 \cos at \therefore F''(0) = -a^2 \cos 0° = -a^2$

$$L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - s F'(0) - F''(0)$$ (सूत्र)

$$\Rightarrow L\{(\cos at)'''\} = s^3 \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - s^2 \times 1 - s \times 0 + a^2 = \frac{s^4}{s^2 + a^2} - s^2 + a^2$$

$$= \frac{s^4 - s^4 - a^2 s^2 + a^2 s^2 + a^4}{s^2 + a^2} = \frac{a^4}{s^2 + a^2}$$ उत्तर

6. समाकलों का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Integrals) :

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तब $L\left\{\int_0^t \{F(x)\, dx\right\} = \frac{1}{s} L\{F(t)\} = \frac{f(s)}{s}$

उदाहरण 9. $L\left\{\int_0^t e^{4x}\, dx\right\}$ ज्ञात करो।

हल : $$L\left\{\int_0^t e^{4x}\, dx\right\} = \frac{1}{s} \cdot L\{e^{4t}\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-4} = \frac{1}{s(s-4)}$$ उत्तर

उदाहरण 10. $L\left\{\int_0^t \cos 6x\, dx\right\}$ ज्ञात करो।

हल : $$L\left\{\int_0^t \cos 6x\, dx\right\} = \frac{1}{s} \cdot L\{\cos 6t\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2 + 6^2} = \frac{1}{s^2 + 36}$$ उत्तर

7. t से गुणन का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Multiplication by t) :

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तो $L\{tF(t)\} = -f'(s)$ (सूत्र)

उदाहरण 11. $L\{t \cdot \sin at\}$ ज्ञात करो।

हल : $$f(s) = L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} = a \cdot (s^2 + a^2)^{-1}$$

$$f'(s) = a \times (-1) \times (s^2 + a^2)^{-2} \times 2s = \frac{-2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$L\{t \sin at\} = -f'(s) = \frac{2as}{s^2 + a^2}$$ उत्तर

8. t^n से गुणन का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Multiplication by t^n) :

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तो $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n}[f(s)]$ (सूत्र)

उदाहरण 12. $L\{t^3 \cdot e^{at}\}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल : $$f(s) = L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$f'(s) = \frac{-1}{(s-a)^2}, \quad f''(s) = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad f'''(s) = \frac{-6}{(s-a)^4}$$

$$L\{t^3 e^{at}\} = (-1)^3 \cdot \frac{d^3}{ds^3}[f(s)] = -f'''(s) = \frac{6}{(s-a)^4}$$ उत्तर

9. t से विभाजन का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Division by t) :

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तथा $\lim_{t \to 0}\left[\frac{1}{t} \cdot F(t)\right]$ का अस्तित्व (existance) है

तब $L\left\{\frac{1}{t} \cdot F(t)\right\} = \int_s^\infty f(s)\, ds$, जहाँ $f(s) = L\{F(t)\}$

उदाहरण 13. $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल : $\because f(s) = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ तथा $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ अर्थात् Limit exist करती है।

$$\therefore L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)\, ds, \text{ जहाँ } f(s) = L\{\sin t\}$$

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{s^2 + 1}\, ds \quad \left\{\because f(s) = \frac{1}{s^2 + 1}\right\}$$

$$= \left|\tan^{-1} s\right|_s^\infty = \tan^{-1} \infty - \tan^{-1} s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \cot^{-1} s = \tan^{-1} \frac{1}{s}$$ उत्तर

10. लाप्लास रूपान्तर के मुख्य गुणों की तालिका

नीचे लाप्लास रूपान्तर से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करने में प्रयोग आने वाली प्रमेयों (Theorems) को तालिकाबद्ध किया गया है।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

क्रम	गुण	यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तब
1.	रैखिक गुण	$L\{C_1 F_1(t) \pm C_2 F_2(t)\} = C_1 L\{F_1(t)\} \pm C_2 L\{F_2(t)\}$
2.	प्रथम स्थानान्तरी गुण	$L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$
3.	द्वितीय स्थानान्तरी गुण	यदि $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & \text{for } t > a \\ 0, & \text{for } t < a \end{cases}$ तब $L\{F(at)\} = e^{-as} \cdot f(s)$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4.	पैमाना परिवर्तन गुण	$L\{G(at)\} = \frac{1}{a} f(s/a)$
5.	अवकल गुणांकों का रूपान्तर	$L\{F'(t)\} = s f(s) - F(0)$ $L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$ $L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) \ldots - F^{n-1}(0)$
6.	समाकलनों का रूपान्तर	$L\left\{\int_0^t F(x)\, dx\right\} = \frac{1}{s} L\{F(t)\} = \frac{1}{s} f(s)$
7.	t से गुणन	$L\{t \cdot F(t)\} = -f'(s)$ $L\{t^2 F(t)\} = (-1)^2 \cdot f''(s)$
8.	t^n से गुणन	$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \{f(s)\}$
9.	t से विभाजन	$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)\, ds,\ f(s) = L\{F(t)\}$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 14. $L\{\sin t - \cos t\}^2$ का मान ज्ञात करो। (मेरठ विश्वविद्यालय 1992)

हल : $L\{(\sin t - \cos t)^2\} = L\{\sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t \cos t\}$

$$= L\{1 - \sin 2t\} = L\{1\} - L\{\sin 2t\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2 + 2^2} = \frac{s^2 + 4 - 2s}{s(s^2 + 4)} \quad (s > 0)$$ उत्तर

उदाहरण 15. $L\{4\cos^2 2t\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $L\{4\cos^2 t\} = L\left\{4 \times \left(\frac{1 + \cos 4t}{2}\right)\right\}$

$$= 2L(1) + 2L(\cos 4t) = 2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 4^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{s^2 + 16 + s^2}{s(s^2 + 16)} = \frac{4(s^2 + 8)}{s(s^2 + 16)} \quad (s > 0)$$ उत्तर

उदाहरण 16. $L\{e^{-2t} - e^{-3t}\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $L(e^{-2t} - e^{-3t}) = L(e^{-2t}) - L(e^{-3t})$

$$= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \quad \text{जहां } s > -2 \text{ और } s > -3 \Rightarrow s > -2$$

$$= \frac{s + 3 - s - 2}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6},\ s > -2$$ उत्तर

उदाहरण 17. $L\{t^4 - 3t^{1/2} + e^{-4t} + 6\cos 2t - 4\sinh 3t\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $L\{t^4 - 3t^{1/2} + e^{-4t} + 6\cos 2t - 4\sinh 3t\}$

$$= L\{t^4\} - 3L\{t^{1/2}\} + L\{e^{-4t}\} + 6L\{\cos 2t\} - 4(\sinh 3t)$$

$$= \frac{4!}{s^5} - 3 \cdot \frac{\Gamma(1/2 + 1)}{s^{1/2+1}} + \frac{1}{s+4} + 6 \cdot \frac{s}{s^2 + 2^2} - 4 \cdot \frac{3}{s^2 - 3^2}$$

$$= \frac{24}{s^5} - \frac{3 \cdot (1/2) \cdot \sqrt{\pi}}{s^{3/2}} + \frac{1}{s+4} + \frac{6s}{s^2 + 4} - \frac{12}{s^2 - 9}$$

$$= \frac{24}{s^5} - \frac{3\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + \frac{1}{s+4} + \frac{6s}{s^2 + 4} - \frac{12}{s^2 - 9}$$ उत्तर

उदाहरण 18. फलन $F(t) = \left(\frac{e^{at} - 1}{a}\right)$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो। (मेरठ विश्वविद्यालय 1992)

हल : $L\{F(t)\} = L\left\{\frac{e^{at} - 1}{a}\right\} = \frac{1}{a}[L\{e^{a}t\} - L\{1\}]$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right], \quad s > 0 \text{ और } s > a$$

$$= \frac{1}{s(s-a)} \quad (s > 0 \text{ यदि } a > 0 \text{ और } s > a \text{ यदि } a > 0)$$ उत्तर

उदाहरण 19. $L\{F(t)\}$ ज्ञात करो जब

$$F(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ t, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$ (मेरठ विश्वविद्यालय 1991)

हल : $L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt$ (परिभाषा)

$$= \int_0^1 e^{-st} \cdot 0 \cdot dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot t \cdot dt + \int_2^\infty e^{-st} \cdot 0 \cdot dt$$

$$= 0 + \left[\left| t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right|_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \cdot dt\right] + 0$$

$$= \left| \frac{t \cdot e^{-st}}{-s} + \frac{e^{-st}}{-s^2} \right|_1^2 = \left(\frac{2e^{-2s}}{-s} + \frac{e^{-2s}}{-s^2}\right) - \left(\frac{e^{-s}}{-s} + \frac{e^{-s}}{-s^2}\right)$$

$$= \frac{-e^{-2s}}{s^2}(2s + 1) + \frac{e^{-s}}{s^2}(s + 1)$$

$$= \frac{e^{-s}(s+1)}{s^2} - \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 20. $L\{F(t)\}$ का मान ज्ञात करो।

$$F(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & , \ t > 1 \\ 0 & , \ 0 < t < 1 \end{cases}$$

हल : $$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot F(t)\, dt \quad \text{(परिभाषा)}$$

$$= \int_0^1 e^{-st} \cdot 0 \cdot dt + \int_1^\infty e^{-st} (t-1)^2\, dt$$

$$= 0 + \int_0^\infty x^2 e^{-s(x+1)}\, dx$$

{$t - 1 = x$ रखने पर $dt = dx$ और $t = 1$ पर $x = 0$ तथा $t = \infty$ पर $x = \infty$}

$$= e^{-s} \int_0^\infty x^2 e^{-sx}\, dx$$

$$= e^{-s} \left[\left| \frac{x^2 \cdot e^{-sx}}{-s} \right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{2x \cdot e^{-sx}}{-s}\, dx \right]$$

$$= e^{-s} \left[(0-0) + \frac{2}{s} \left| \frac{x \cdot e^{-sx}}{-s} \right|_0^\infty - \frac{2}{s} \int_0^\infty \frac{1 \cdot e^{-sx}\, dx}{-s} \right]$$

$$= e^{-s} \left[\frac{2}{s} \times (0-0) + \frac{2}{s^2} \times \left| \frac{e^{-sx}}{-s} \right|_0^\infty \right]$$

$$= e^{-s} \left[-\frac{2}{s^3} (e^{-\infty} - e^0) \right] = e^{-s} \left\{ -\frac{2}{s^3} (0-1) \right\} = \frac{2e^{-s}}{s^3}, s > 0 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 21. $L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $$L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L\{t^{-1/2}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(-1/2+1)}{s^{(-1/2)+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 22. $F(t) = \sin\sqrt{t}$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

हल : ∵ $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$L\{\sin\sqrt{t}\} = L\left[t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \ldots \right]$$

$$= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{6 \cdot s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{120 \cdot s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{5040 \cdot s^{9/2}} + \ldots \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{s^{3/2}} - \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{6 \cdot s^{5/2}} + \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{120 \cdot s^{7/2}} - \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{5040 \cdot s^{9/2}} + \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \left[1 - \frac{1}{4s} + \frac{1}{32s^2} - \frac{1}{384s^3} + \ldots \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \left[1 - \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{1}{4s}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{4s}\right)^2 - \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{1}{4s}\right)^3 + \ldots \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} \cdot e^{-1/4s} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 23. सिद्ध करो कि $L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot e^{-1/4s}$ (मेरठ विश्वविद्यालय 1992)

हल : ∵ $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!} + \ldots \right]$$

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = L\left[t^{-1/2} - \frac{t^{1/2}}{2} + \frac{t^{3/2}}{24} - \frac{t^{5/2}}{720} + \ldots \right]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2 \cdot s^{3/2}} + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{24 \cdot s^{5/2}} - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{720 \cdot s^{7/2}} + \ldots \ldots$$

$$= \frac{1}{s^{1/2}} \left[\sqrt{\pi} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{2s} + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{24s^2} - \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{720s^3} + \ldots \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \left\{ 1 - \frac{1}{4s} + \frac{1}{32s^2} - \frac{1}{384s^3} + \ldots \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left[1 - \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{1}{4s}\right) + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{1}{4s}\right)^2 - \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{1}{4s}\right)^3 + \ldots \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}} \times e^{-1/4s} \quad \text{सिद्धम्}$$

उदाहरण 24. $L\{t^3 \cdot e^{-3t}\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : प्रथम स्थानान्तरी गुण से,

यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तो $L\{e^{at} \cdot F(t)\} = f(s-a)$

यहाँ पर $L\{F(t)\} = L\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$

∴ $$L\{t^3 \cdot e^{-3t}\} = \frac{3!}{(s+3)^4} = \frac{6}{(s+3)^4} \quad \text{उत्तर}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

प्रश्न 25. $L\{e^t \sin^2 t\}$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)

हल: $L\{F(t)\} = L\{\sin^2 t\} = L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+2^2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)}\right] = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

$$L\{e^t \cdot \sin^2 t\} = \frac{2}{(s-1)[(s-1)^2+4]} \quad \text{(प्रथम स्थानान्तरी गुण से)}$$

$$= \frac{2}{(s-1)(s^2-2s+5)}$$ उत्तर

उदाहरण 26. $t \cdot e^{2t} \cdot \cos 5t$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

हल: $L\{\cos 5t\} = \frac{s}{s^2+25}$

$$L\{e^{2t}\cos 5t\} = \frac{s-2}{(s-2)^2+25} = f(s)$$

$$L\{t \cdot e^{2t}\cos 5t\} = -f'(s)$$

$$= -\frac{d}{dx}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+25}\right]$$

$$= -\frac{[(s-2)^2+25]\times 1 - (s-2)\times 2(s-2)}{[(s-2)^2+25]^2}$$

$$= -\frac{(s-2)^2+25-2(s-2)^2}{[(s-2)^2+25]^2} = \frac{(s-2)^2-25}{[(s-2)^2+25]^2}$$ उत्तर

उदाहरण 27. $L\{e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $L\{(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)\} = 3 \times \frac{2}{s^2-2^2} - 5 \times \frac{s}{s^2-2^2} = \frac{6-5s}{s^2-2^2}$

$$L\{e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)\} = \frac{6-5(s+1)}{(s+1)^2-4} \quad \text{(प्रथम स्थानान्तरी गुण से)}$$

$$= \frac{1-5s}{s^2+2s-3}$$ उत्तर

उदाहरण 28. यदि $L\{F(t)\} = \frac{p^2-3p+2}{(3p-1)^2(3p+1)}$ तो पैमाना परिवर्तन गुण (Change of scale property) द्वारा $L\{F(3t)\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $$L\{F(t)\} = \frac{p^2-3p+2}{(3p-1)^2(3p+1)}$$

$\because$ पैमाना परिवर्तन गुण के अनुसार, $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{p}{a}\right)$

$$\therefore \quad L\{F(3t)\} = \frac{1}{3} f\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{p^2}{9} - \frac{3p}{3} + 2}{\left(3 \cdot \frac{p}{3} - 1\right)^2 \left(\frac{3p}{3}+1\right)} = \frac{p^2-9p+18}{27(p-1)^2(p+1)}$$ उत्तर

उदाहरण 29. यदि $F(t) = e^t$ तो $L\{G(t)\}$ का मान ज्ञात करो जबकि $G(t) = \begin{cases} e^{t-4}, & t > 4 \\ 0, & t < 4 \end{cases}$

हल: $f(s) = L\{F(t)\} = L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$ जहाँ $s > 1$

द्वितीय स्थानान्तरी गुण से, $L\{G(t)\} = e^{-as} L\{F(t)\} = e^{-as} f(s)$

$$= e^{-4s} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{e^{-4s}}{s-1} \text{ जहाँ } s > 1$$ उत्तर

उदाहरण 30. $L\{t \cdot \cosh 4t\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तो $L\{t \cdot F(t)\} = -f'(s)$

यहाँ पर, $f(s) = L\{\cosh 4t\} = \frac{s}{s^2-4^2} = \frac{s}{s^2-16}$

$$f'(s) = \frac{(s^2-16)\times 1 - s \times 2s}{(s^2-16)^2} = \frac{s^2-16-2s^2}{(s^2-16)^2} = \frac{-(s^2+16)}{(s^2-16)^2}$$

$$L\{t\cosh 4t\} = -f'(s) = \frac{s^2+16}{(s^2-16)^2}$$ उत्तर

उदाहरण 31. $L\{t^2 \cdot \cos at\}$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

हल: यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तो $[t^2 F(t)] = (-1)^2 f''(s)$

$$f(s) = L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$f'(s) = \frac{(s^2+a^2)\cdot 1 - s \times 2s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$f''(s) = \frac{(s^2+a^2)^2(-2s) - (a^2-s^2)\cdot 2(s^2+a^2)\cdot 2s}{(s^2+a^2)^4}$$

$$= \frac{-2s(s^2+a^2)[s^2+a^2+2a^2-2s^2]}{(s^2+a^2)^4}$$

$$= \frac{-2s(s^2+a^2)(3a^2-s^2)}{(s^2+a^2)^4} = \frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$$

$$L\{t^2 \cdot \cos at\} = (-1)^2 f''(s) = \frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2-a^2)^3}, \quad s > 0$$ उत्तर

उदाहरण 32. सिद्ध करो कि $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$, इससे $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ का मान भी ज्ञात करो। $L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}$ का अस्तित्व (existance) है या नहीं? (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल : (i) $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ (देखो उदाहरण 13)

(ii) $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = a\cdot L\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = a\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s/a}\right) = \tan^{-1}\frac{a}{s} = \cot^{-1}\frac{s}{a}$ उत्तर

(iii) $L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}$ के लिए,

$$f(s) = L\{F(t)\} = L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)\,ds = \int_s^\infty \frac{s}{s^2+a^2}\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\left|\log(s^2+a^2)\right|_s^\infty = \frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}\log(s^2+a^2) - \frac{1}{2}\log(s^2+a^2)$$

Which does not exist since $\lim_{s\to\infty}\log(s^2+a^2)$ is not defined.

उदाहरण 33. $L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx\right\}$ का मान ज्ञात करो। (मेरठ विश्वविद्यालय 1992)

हल : पहले $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ का मान ज्ञात करो जिसके लिए

$$f(s) = L[F(t)] = L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)\,ds = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds$$

$$= \left|\tan^{-1}s\right|_s^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \cot^{-1}s$$

अब अनुच्छेद 6 से, $L\left\{\int_0^t F(x)\,dx\right\} = \frac{1}{s}\cdot L[F(t)] = \frac{1}{s}\cdot f(s)$

$\Rightarrow$ $L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx\right\} = \frac{1}{s}L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{1}{s}\cdot\cot^{-1}s$ उत्तर

उदाहरण 34. $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt$ का मान ज्ञात करो। (मेरठ विश्वविद्यालय 1991)

हल : $f(s) = L\{F(t)\} = L\{e^{-t}-e^{-3t}\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \Rightarrow f(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$

$$L\left\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^\infty e^{-st}\cdot\left(\frac{e^{-t}-e^{3t}}{t}\right)dt \qquad \text{...(1)}$$

$\because$ अनुच्छेद 9 से, $L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)\,ds$

$$\therefore\quad L\left\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right)ds$$

$$= \left|\log(s+1) - \log(s+3)\right|_s^\infty = \left|\log\frac{s+1}{s+3}\right|_s^\infty$$

$$= \left|\log\left(\frac{1+1/s}{1+3/s}\right)\right|_s^\infty = \log\left(\frac{1+0}{1+0}\right) - \log\left(\frac{1+1/s}{1+3/s}\right)$$

$$= 0 - \log\frac{s+1}{s+3} = \log\left(\frac{s+3}{s+1}\right) \qquad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt = \log\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

Taking limit as $s \to 0$, we have

$$\int_0^\infty e^0\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt = \log\left(\frac{0+3}{0+1}\right)$$

या $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt = \log 3$ उत्तर

अभ्यासमाला 15

निम्नलिखित का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो—

1. (i) $3t^3 + 2e^{-2t} + 5\sin 2t$ (ii) $3t^3 + 2\sin 3t + 4e^t$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)
2. $e^{-5t} + 3e^{3t}$ 3. $a + bt + ct^2$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)
4. $9\cos^2 3t$ 5. $(2t^2-1)^2$
6. $2e^{3t} - e^{-3t}$ 7. $t^{1/2} + \sin 5t\cos t$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1998)
8. $t^3 e^{-3t}$ 9. $e^{3t}\cos 2t$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1995)
10. $e^t(t+3)^2$ 12. $t^2 - e^{-at}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)
12. $3e^{-2t}\sin 4t$ 13. $e^t\cosh t$
14. $e^{-t}(2\cos 4t - 3\sin 4t)$ 15. $e^t\cdot(t+3)^2$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)
16. $\frac{\cos at}{t}$ 17. $\frac{\sin at}{t}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)
18. $e^{-t}\sin^2 t$ 19. $e^{-t}\cos^2 t$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2003, 11)
20. $t^2\cos at$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

21. सिद्ध करो कि $L\left\{\frac{\sin 4t}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{s}\right)$

22. $L(t \cdot e^{-t} \sin^2 t)$ का मान ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

23. $L\{t(3\sin 2t - 2\cos 2t)\}$ का मान ज्ञात करो।

24. $L\{\sin at - at\cos at\}$ का मान ज्ञात करो।

25. $t \cdot e^{-2t} \cdot \sin 2t$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

26. यदि $L\{F(t)\} = f(p)$ तो सिद्ध करो कि $L\{t^2 \sin at\} = \frac{2a(3p^2 - a^2)}{(p^2 + a^2)^3}, p > 0$

27. दिखाओ कि $L\{t^3 \cos t\} = \frac{6p^4 - 36p^2 + 6}{(p^2 + 1)^4}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)

28. यदि $F(t) = e^{3t}(3\sinh 4t - 2\cosh 4t)$ तो $L\{F(t)\}$ ज्ञात करो।

29. $L\{F(t)\}$ ज्ञात करो यदि $F(t) = \begin{cases} (t-1)^3, & t > 1 \\ 0, & 0 < t < 1 \end{cases}$

30. $L\{F(t)\}$ ज्ञात करो यदि $F(t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right), & t > \frac{\pi}{3} \\ 0, & t < \frac{\pi}{3} \end{cases}$

31. $L\{F(t)\}$ का मान ज्ञात करो। यदि $F(t) = \begin{cases} e^t, & 0 < t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

32. दिखाओ कि $L\{(1 + e^{-t})^3\} = \frac{1}{s} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+3)^4}$ (मेरठ विश्वविद्यालय 1990)

33. यदि $F(t) = t^6$ तो $L\{F'''(t)\}$ ज्ञात करो।

34. यदि $F(t) = \sin 4t$ तो $L\{F'''(t)\}$ ज्ञात करो।

35. यदि $F(t) = t^3 - 2e^{2t} + \cos t$ तो $L\{F'''(t)\}$ ज्ञात करो।

36. $L\left\{\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

37. $L(\cos\sqrt{t})$ का मान ज्ञात करो।

38. $L\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

39. दिखाओ कि $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

40. $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right) dt$ का मान ज्ञात करो।

41. यदि $f(t) = e^t$ तथा $g(t) = \begin{cases} e^{(t-4)}, & t \ge 4 \\ 0, & t < 4 \end{cases}$ तो $L\{g(t)\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला 15

1. (i) $\frac{18}{s^4} + \frac{2}{s+2} + \frac{10}{s^2 + 2^2}$ (ii) $\frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^2+9} + \frac{4}{s-1}$

2. $\frac{4(s+3)}{s^2 + 2s - 15}$

3. $\frac{as^2 + bs + 2c}{s^5}$

4. $\frac{9(s^2 + 18)}{s(s^2 + 36)}$

5. $\frac{s^4 - 8s^2 + 96}{s^5}$

6. $\frac{s+9}{s^2 - 9}$

7. $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + \frac{6}{s^2 + 36} + \frac{4}{s^2 + 16}$

8. $\frac{6}{(s+3)^4}$

9. $\frac{s-3}{s^2 - 6s + 13}$

10. $\frac{9s^2 - 12s + 5}{(s-1)^3}$

11. $\frac{2}{(s+a)^3}$

12. $\frac{12}{s^2 + 4s + 20}$

13. $\frac{s-1}{(s-1)^2 - a^2}$

14. $\frac{2(s-6)}{s^2 + 2s + 17}$

15. $\frac{9s^2 - 12s + 5}{(s-1)^3}$

16. लाप्लास रुपान्तर का अस्तित्व नहीं है।

17. $\tan^{-1}\frac{a}{s}$

18. $\frac{2}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}$

19. $\frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}$

20. $\frac{2s(s^2 - 3a^2)}{(s^2 + a^2)^3}$

21. $\frac{2(s^2 - 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 25)}$

22. $\frac{6(s+1)^2 + 8}{(s+1)^2(s^2 + 2s + 5)^2}$

23. $\frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$

24. $\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$

25. $\frac{4(s+1)}{(s^2 + 2s + 5)^2}$

28. $\frac{2(9-s)}{s^2 - 6s - 7}$

29. $\frac{6 \cdot e^{-s}}{s^4}, s > 0$

30. $\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2 + 1}$

31. $\frac{1 - e^{1-s}}{s-1}$

33. $\frac{720}{s^4}$

33. $\frac{-64s}{s^2 + 16}$

35. $\frac{6}{s} - \frac{2s^3}{s-2} + \frac{s^2}{s^2+1} + s^2 + 4s + 9$

36. $\frac{1}{s} - \frac{1}{6s^2} + \frac{1}{60s^2} - \frac{1}{840s^3} + \ldots$

37. $\frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{12s^3} - \ldots$

38. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$

40. $\log\left(\frac{b}{a}\right)$

41. $\frac{e^{-4s}}{s-1}, s > 1$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

16 प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर (Inverse Laplace Transforms)

1. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर (परिभाषा) :

यदि $f(s)$ को फलन $F(t)$ का लाप्लास रूपान्तर कहते है तब $F(t)$ को $f(s)$ का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर कहते हैं और $L^{-1}\{f(s)\}$ से प्रदर्शित करते है।

अत, यदि $L\{F(t)\} = f(s)$ तब $f(t) = L^{-1}\{f(s)\}$

उदाहरण : $\because$ $L\{t^4\} = \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5}$ $\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{24}{s^5}\right\} = t^4$

2. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरों की तालिका (Table of Inverse Laplace Transforms) :

क्रम	लाप्लास रूपान्तर	प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर
1.	$\because$ $L\{1\} = \frac{1}{s}$	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
2.	$\because$ $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
3.	$\because$ $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ (n धनात्मक पूर्णांक है)	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$ (n धनात्मक पूर्णांक है)
4.	$\because$ $L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ (n, -1 से बड़ा तथा भिन्नात्मक है)	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ (n, -1 से बड़ा तथा भिन्नात्मक है)
5.	$\because$ $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$
6.	$\because$ $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin at$
7.	$\because$ $L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$
8.	$\because$ $L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \sinh at$
9.	$\because$ $L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$	$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$

3. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर के कुछ मुख्य गुण (Some properties of Inverse Laplace) :

(1) रैखिक गुण (Linear Property) :

$$L^{-1}\{C_1f_1(s) \pm C_2f_2(s)\} = C_1L^{-1}\{f_1(s)\} \pm C_2L^{-1}\{f_2(s)\} = C_1F_1(t) \pm C_2F_2(t)$$

(2) प्रथम स्थानान्तरी गुण (First Shifting Property) :

यदि $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ तो $L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}L^{-1}\{f(s)\} = e^{at}\cdot F(t)$

उदाहरण (i) $\because$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$

$\because$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^{n+1}}\right\} = e^{3t}\cdot\frac{t^n}{n!}$

(ii) $\because$ $L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} = \sin 4t$

$\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+16}\right\} = e^{-2t}\sin 4t$

(3) द्वितीय स्थानान्तरी गुण (Second Shifting Property) :

यदि $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$

तब $L^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$

उदाहरण : $\because$ $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

$\therefore$ $L^{-1}\left\{e^{-4s}\cdot\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = \begin{cases} F(t-a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$

$= \cos a(t-4)\cdot H(t-4)$

(4) पैमाना परिवर्तन गुण (Change of Scale Property) :

यदि $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ तो $L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{t}{a}\right)$

उदाहरण : $\because$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ $\therefore$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{4s-1}\right\} = \frac{1}{4}e^{t/4}$

4. अवकल गुणांकों के प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर (Inverse Laplace Transform of Derivatives) :

यदि $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

तब $L^{-1}\{f'(s)\} = -t\cdot F(t)$; $L^{-1}\{f''(s)\} = (-1)^2t^2F(t)$

In general $L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n\cdot t^n F(t)$ (सूत्र)

उदाहरण : माना कि $f(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$

तब $L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\because \quad f'(s) = \frac{(s^2+a^2)\cdot 1 - s\cdot 2s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{f'(s)\} = -t\,F(t) \text{ से } L^{-1}\left\{\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -t\cos at$$

5. समाकलों का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर (Inverse Laplace Transform of Integrals) :

यदि $\quad L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \quad$ तब $\quad L^{-1}\left\{\int_0^\infty f(x)\,dx\right\} = \dfrac{F(t)}{t}$

6. s से गुणन (Multiplication by s) :

यदि $\quad L^{-1}\{F(s)\} = F(t)$

तब $\quad L^{-1}\{s\cdot f(s)\} = F'(t); \quad L^{-1}[s^2 f(s)] = F''(t)$

$L^{-1}\{s^n\cdot f(s)\} = F^n(t)$ (सूत्र)

7. s से विभाजन (Division by s) :

यदि $\quad L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \quad$ तब $\quad L^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(x)\,dx$

उदाहरण : $\because \quad L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-a}\right\} = \int_0^t e^{ax}\,dx = \left|\frac{e^{ax}}{a}\right|_0^t$$

$$= \frac{1}{a}(e^{at}-e^0) = \frac{1}{a}(e^{at}-1)$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \frac{1}{a}\cdot(e^{at}-1)$$ उत्तर

8. संचलन गुण (Convolution Property) :

यदि $\quad L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \quad$ और $\quad L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$

तब $\quad L^{-1}\{f(s)\cdot g(s)\} = \int_0^t f(x)\cdot g(t-x)\,dx = F*G$ (सूत्र)

उदाहरणतः $\because \quad L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-4}\right\} = e^{4t}$ और $\quad L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\cdot\frac{1}{s+1}\right\} = \int_0^t e^{4x}\cdot e^{-(t-x)}\,dx$$

$$= \int_0^t e^{5x-t}\,dx = \left|\frac{e^{5x-t}}{5}\right|_0^t = \frac{1}{5}\cdot(e^{4t}-e^{-t})$$ उत्तर

फलनों के संचलन का नियम, क्रम विनिमय नियम, साहचर्य नियम तथा बंटन नियम का पालन करता है, अर्थात्

(i) $F*G = G*F$ (ii) $F*(G*H) = (F*G)*H$

(iii) $F*(G+H) = F*G + F*H$

9. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर के मुख्य गुणों की तालिका :

आगे, प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर से सम्बन्धित प्रश्नों को हल करने में, प्रयोग में आने वाली प्रमेयों को तालिका बद्ध किया गया है।

सारांश (Summary) : **याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)**

क्र० सं०	गुण	यदि $L^{-1}[f(s)] = f(t)$ तब
1.	रैखिक गुण	$L^{-1}\{C_1F_1(s) \pm C_2F_2(s)\} = C_1L^{-1}\{f_1(s)\} \pm C_2L^{-1}\{f_2(s)\}$
2.	प्रथम स्थानान्तरी गुण	$L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}\cdot L^{-1}\{f(s)\} = e^{at}F(t)$
3.	द्वितीय स्थानान्तरी गुण	$L^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & , \text{ for } t > \\ 0 & , \text{ for } t < a \end{cases}$
4.	पैमाना परिवर्तन गुण	$L^{-1}\{f(as)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{t}{a}\right)$
5.	अवकलन गुण	$L^{-1}\{f'(s) = -tF(t)\}, L^{-1}\{f''(s)\} = t^2F(t)$ $L^{-1}\{f'''(s) = -t^3F(t)\}$ $L^{-1}\{f^n(s) = (-1)^n F(t)\}$
6.	समाकलन गुण	$L^{-1}\left\{\int_0^\infty f x)\,dx\right\} = \dfrac{F(t)}{t}$
7.	s से गुणन	$L^{-1}\{sf(s) = F'(t)\}$ $L^{-1}\{s^2f(s)\} = F''(t)$
8.	s^n से गुणन	$L^{-1}\{s^nf(s)\} = F^n(t)$
9.	s से विभाजन	$L^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(x)\,dx$
10.	संचलन गुण	$L^{-1}\{f(s)\cdot g(s)\} = \int_0^t f(x)\cdot g(t-x)\,dx = F*G$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{6}{s-2} + \dfrac{1}{s^4}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4} + \frac{6}{s-2} + \frac{1}{s^4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 6L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$= \cos 2t + 6\cdot e^{2t} + \frac{t^3}{3!}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 2. $L^{-1}\left\{\frac{6}{3p-2}+\frac{2+3p}{4p^2+9}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $L^{-1}\left\{\frac{6}{3p-2}+\frac{2+3p}{4p^2+9}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{6}{3p-2}+\frac{2}{4p^2+9}+\frac{3p}{4p^2+9}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{6}{3\left(p-\frac{2}{3}\right)}+\frac{2}{4\left(p^2+\frac{9}{4}\right)}+\frac{3p}{4\left(p^2+\frac{9}{4}\right)}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p-\frac{2}{3}\right)}\right\}+\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right\}+\frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+\left(\frac{3}{2}\right)}\right\}$$

$$= 2e^{2t/3}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$ उत्तर

नोट—प्राचल s के स्थान पर प्राचल p का प्रयोग किया गया है।

उदाहरण 3. $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^5}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p-1+1}{(p-1)^5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p-1}{(p-1)^5}+\frac{1}{(p-1)^5}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^5}\right\}$$

$$= e^t\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p^4}\right\}+e^t\left\{\frac{1}{p^5}\right\}$$ (प्रथम स्थानान्तरी गुण से)

$$= e^t\cdot\frac{t^3}{3!}+e^t\cdot\frac{t^4}{4!} = \frac{1}{24}e^t t^3(4+t)$$ उत्तर

उदाहरण 4. $L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^2-6s+13}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{(s-3)^2+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3(s-3)+7}{(s-3)^2+4}\right\}$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right\}+7L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2+4}\right\}$$

$$= 3e^{3t}\cdot L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}+\frac{7}{2}\cdot e^{3t}\cdot L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= 3e^{3t}\cdot\cos 2t+\frac{7}{2}\cdot e^{3t}\cdot\sin 2t$$

$$= e^{3t}\left(3\cos 2t+\frac{7}{2}\sin 2t\right)$$ उत्तर

उदाहरण 5. $L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $\because L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\} = e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$ (प्रथम स्थानान्तरी गुण से)

$$= e^{2t}\cdot\frac{t^3}{3!} = \frac{1}{6}e^{2t}\cdot t^3$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{e^{5s}}{(s-2)^4}\right\} = \begin{cases}\frac{1}{6}e^{2(t-5)}\cdot t^3 & , t>5\\ 0 & , t<5\end{cases}$$

$$= \frac{1}{6}e^{2(t-5)}\cdot t^3\cdot H(t-5)$$ उत्तर

उदाहरण 6. $L^{-1}\left\{\frac{3p+2}{4p^2+12p+9}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $L^{-1}\left\{\frac{3p+2}{4p^2+12p+9}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3\left(p+\frac{2}{3}\right)}{4\left(p^2+3p+\frac{9}{4}\right)}\right\}$

$$= \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{\left(p+\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{6}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2}\right\} = \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p+\frac{3}{2}\right)}\right\}-\frac{5}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot e^{-3t/2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}-\frac{5}{8}\cdot e^{-3t/2}\cdot\left\{\frac{1}{p^2}\right\}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot e^{3t/2}\cdot 1-\frac{5}{8}\cdot e^{-3t/2}\cdot t = e^{3t/2}\left(\frac{3}{4}-\frac{5t}{8}\right) = \frac{1}{8}(6-5t)e^{-3t/2}$$ उत्तर

उदाहरण 7. $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^{5/2}}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^{5/2}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1-1}{(s+1)^{5/2}}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{3/2}}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{5/2}}\right\}$$

$$= e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\}-e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\}$$

$$= e^{-t}\cdot\frac{t^{(3/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}-e^{-t}\cdot\frac{e^{(5/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = e^{-t}\cdot\left\{\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}-\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}\right\}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^{5/2}}\right\} = 2\frac{e^{-t}\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{2t}{3}\right] = \frac{2e^{-t}\cdot\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}(3-2t)$$

उदाहरण 8. यदि $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot t\sin t$ तो $L^{-1}\left\{\frac{8p}{(4p^2+1)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot t\cdot\sin t$ (दिया है)

⇒ $L^{-1}\left\{\frac{ap}{(ap^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{t}{a}\cdot\sin\left(\frac{t}{a}\right)$ (पैमाना परिवर्तन गुण से p के स्थान पर ap लेने पर)

⇒ $L^{-1}\left\{\frac{2ap}{(ap^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{a}\cdot\frac{t}{a}\cdot\sin\left(\frac{t}{a}\right)$ (2 से गुणा करने पर)

⇒ $L^{-1}\left\{\frac{8p}{(4p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{a}\cdot\sin\left(\frac{t}{4}\right)$ ($a = 4$ रखने पर)

⇒ $L^{-1}\left\{\frac{8p}{(4p^2+1)^2}\right\} = \frac{t}{16}\sin\left(\frac{t}{4}\right)$ उत्तर

उदाहरण 9. $L^{-1}\left\{\frac{6p^2+22p+18}{p^3+6p^2+11p+6}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{6p^2+22p+18}{p^3+6p^2+11p+6}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{6p^2+22p+18}{(p+1)(p+2)(p+3)}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}+\frac{2}{p+2}+\frac{3}{p+3}\right\}$ (आंशिक भिन्नें बनाने पर)

$= e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{-3t}$ उत्तर

उदाहरण 10. सिद्ध करो कि $L^{-1}\left\{\frac{p}{p^4+p^2+1}\right\} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sinh\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$

हल : $L^{-1}\left\{\frac{p}{p^4+p^2+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2-p^2}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2-p+1)(p^2+p+1)}\right\}$

$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{(p^2+p+1)-(p^2-p+1)}{(p^2-p+1)(p^2+p+1)}\right\}$

$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1/2)^2+3/4}-\frac{1}{(p+1/2)^2+3/4}\right\}$

$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1/2)^2+3/4}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1/2)^2+3/4}\right\}$

$= \frac{1}{2}e^{t/2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} - \frac{1}{2}\cdot e^{-t/2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\cdot e^{t/2}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot e^{-t/2}\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{t/2}-e^{-t/2}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sinh\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$ सिद्धम्

उदाहरण 11. $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2-a^2)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : ∵ $\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{(p^2-a^2)}\right) = \frac{-2p}{(p^2-a^2)^2}$ ∴ $\frac{p}{(p^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2-a^2}\right)$

⇒ $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2-a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2-a^2}\right)\right\} = -\frac{1}{2}L^{-1}\{f'(p)\}$

$= \frac{1}{2}\cdot(-1)^1\cdot t\cdot L^{-1}\{f(p)\} = \frac{1}{2}t\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2-a^2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1}{a}\sinh at = \frac{t}{2a}\sinh at$ उत्तर

उदाहरण 12. $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\} = e^{-t}\cdot L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

अब $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$ ∴ $\frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$

⇒ $e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = e^{-t}L^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}$

$= -\frac{1}{2}e^{-t}\cdot L^{-1}[f'(s)] = -\frac{1}{2}e^{-t}\cdot(-1)^1\cdot t\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$

$= \frac{1}{2}e^{-t}\cdot t\cdot\sin t$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 13. $L^{-1}\left\{\log\frac{s-2}{s+3}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल:
$$f(s) = \log\left(\frac{s-2}{s+3}\right) = \log(s-2) - \log(s+3)$$
$$f'(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}$$
$$L^{-1}\{f'(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}\right\} = e^{2t} - e^{-3t} \quad ...(1)$$

लेकिन,
$$L^{-1}\{f'(s)\} = (-1)\cdot t\cdot L^{-1}\{f(s)\} \quad ...(2)$$

या
$$(-1)\cdot t\cdot L^{-1}\{f(s)\} = e^{2t} - e^{-3t}$$

या
$$L^{-1}\left\{\log\left(\frac{s-2}{s+3}\right)\right\} = \frac{e^{-3t} - e^{2t}}{t}$$
उत्तर

उदाहरण 14. $L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right\}$ का मान ज्ञात करो।

हल:
$$f(p) = \log\left(\frac{p^2+1}{p^2}\right) = \log(p^2+1) - 2\log p$$
$$f'(p) = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{2}{p}$$
$$L^{-1}\{f'(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{2p}{p^2+1} - \frac{2}{p}\right\} = 2(\cos t - 1)$$

लेकिन अनुच्छेद 4 के अनुसार
$$L^{-1}\{f'(p)\} = -t\cdot L^{-1}\{f(p)\}$$

या
$$L^{-1}\{f(p)\} = \frac{-1}{t}L^{-1}f'(p) = -\frac{1}{t}\times[-2(1-\cos t)]$$
$$= \frac{2}{t}(1-\cos t) = F(t)$$

लेकिन
$$L^{-1}\left\{\frac{f(p)}{p}\right\} = \int_0^t F(x)\,dx$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right\} = \int_0^t \frac{2}{x}\cdot(1-\cos x)\cdot dx$$
उत्तर

उदाहरण 15. संकलन प्रमेय (Convolution Theorem) के प्रयोग से निम्नलिखित का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए।

(i) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p+2)}\right\}$ (ii) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-2)(p^2+1)}\right\}$

हल: (i) $L^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} = e^t = F_1(t), L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} = e^{-2t} = F_2(t)$

संचलन प्रमेय से
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p+2}\right\} = F_1(t)*,f_2(t) = \int_0^t F_1(x)\cdot F_2(t-x)\,dx$$
$$= \int_0^t e^x\cdot e^{-2(t-x)}\,dx = \int_0^t e^{(3x-2t)}\,dx = \int_0^t e^{3x}\cdot e^{-2t}\,dx$$
$$= \int_0^t e^{3x}\,dx = e^{-2t}\cdot\left|\frac{e^{3x}}{3}\right|_0^t = e^{-2t}\left(\frac{e^{+3t}-e^0}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(e^{-2t}\cdot e^{3t} - 1\times e^{-2t}) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$$
उत्तर

(ii) $L^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\right\}e^{2t} = F_1(t), \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} = \sin t = F_2(t)$

संचलन प्रमेय से
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right\} = F_2(t)*F_1(t) = \int_0^t \sin x\, e^{2(t-x)}\,dx$$
$$= e^{2t}\int_0^t e^{-2x}\sin x\,dx = e^{2t}\left|\frac{1}{5}\cdot e^{-2x}(-2\sin x - \cos x)\right|_0^t$$
(दो बार खण्डशः समाकलन करने पर)
$$= \frac{1}{5}e^{2t}\left[e^{-2t}(-2\sin t - \cos t) - e^0(-2\sin 0^\circ - \cos 0^\circ)\right]$$
$$= \frac{1}{5}e^{2t}[e^{-2t}(-2\sin t - \cos t) + 1]$$
$$= \frac{1}{5}[-2\sin t - \cos t + e^{2t}] = \frac{1}{5}[e^{2t} - 2\sin t - \cos t]$$
उत्तर

अभ्यासमाला 16 (1)

निम्नलिखित का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो—

1. $\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+16} + \frac{5}{s-3}$
2. $\frac{1}{s^4} - \frac{4}{s-2} + \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{2}{s^{7/2}}$
3. $\frac{6}{2s-3} + \frac{8-6s}{16s^2+9}$
4. $\frac{5}{s^2} + \frac{(\sqrt{s}-1)^2}{s^2} + \frac{7}{3s+2}$
5. दिखाओ कि—

(i) $L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}\right\} = t - \frac{t^3}{(6)^2} + \frac{t^5}{(120)^2} - \frac{t^7}{(5040)^2} + \cdots$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(ii) $L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}\right\} = 1 - \frac{t^2}{(2)^2} + \frac{t^4}{(24)^2} - \frac{t^6}{(720)^2} + \ldots$

निम्नलिखित का मान ज्ञात करो–

6. $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2+4s+8}\right\}$

7. $L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^2-4s+20}\right\}$

8. $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}$

9. $L^{-1}\left\{\frac{3p+7}{p^2-2p-3}\right\}$

10. $L^{-1}\left\{\frac{3p+1}{(p+1)^4}\right\}$

11. $L^{-1}\left\{\frac{e^{-5p}}{(p-3)^5}\right\}$

12. $L^{-1}\left\{\frac{e^{4-3p}}{(p+4)^{5/2}}\right\}$

13. $L^{-1}\left\{\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}\right\}$

14. $L^{-1}\left\{\frac{pe^{-2\pi p/3}}{p^2+9}\right\}$

15. $L^{-1}\left\{\frac{3}{p} - \frac{4e^{-p}}{p^2} + \frac{4e^{-3p}}{p^2}\right\}$

16. $L^{-1}\left\{\frac{p+1}{p(p^2+4p+8)}\right\}$

17. $L^{-1}\left\{\frac{2p+1}{(p+2)^2(p-1)^2}\right\}$

18. $L^{-1}\left\{\frac{4s+5}{(s+2)(s-1)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

19. $L^{-1}\left\{\frac{6s^2+22s+18}{(s^3+6s^2+11s+6)}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

20. $L^{-1}\left\{\log\left(\frac{s+3}{s+2}\right)\right\}$ का मान ज्ञात करो।

21. $L^{-1}\left\{\log\frac{s}{(s^2+a^2)}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

22. $L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\log\frac{p+3}{p+2}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

23. $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

24. $L^{-1}\left\{\frac{3s}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)

25. यदि $L^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\} = t\cos t$ तो $L^{-1}\left\{\frac{9s^2-1}{(9s^2+1)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करो।

संवलन प्रमेय के प्रयोग से निम्नलिखित के मान ज्ञात करो–

26. (i) $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+a^2)^2}\right\}$ (ii) $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p+1)(p-2)}\right\}$

(iii) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+4)(p+2)}\right\}$

उत्तरमाला 16 (1)

1. $\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 4t + 5e^{3t}$

2. $\frac{t^3}{6} - 4e^{2t} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{8s^{5/2}}{3\cdot\sqrt{\pi}}$

3. $3e^{3t/2} + \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{4} - \frac{3}{8}\cos\frac{3t}{4}$

4. $1 + 6t - \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} + \frac{7}{3}\cdot e^{-2t/3}$

6. $e^{-2t}\left(3\cos 2t - \frac{5}{2}\sin 2t\right)$

7. $e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t)$

8. $e^{-3t}\left(\cos 4t - \frac{1}{2}\sin 4t\right)$

9. $e^{t}(3\cosh 2t + 5\sinh 2t)$

10. $e^{-t}\left(\frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)$

11. $\frac{1}{24}(t-5)^4\cdot e^{3(t-5)}H(t-5)$

12. $\frac{4e^4}{3\sqrt{\pi}}\cdot(t-3)^{3/2}\cdot e^{-4(t-3)}\cdot H(t-3)$

13. $-\sin t\cdot H(t-\pi)$

14. $\cos 3\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)\cdot H\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)$

15. $3 - 4(t-1)\cdot H(t-1) + 4(t-3)\cdot H(t-3)$

16. $\frac{1}{8}[1 - e^{-2t}(\cos 2t - 3\sin 2t)]$

17. $\frac{1}{3}t(e^t - e^{-2t})$

18. $\frac{1}{3}te^t + \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}$

19. $e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$

20. $\frac{1}{t}\cdot(e^{-2t} - e^{-3t})$

21. $\frac{1}{t}\cdot(2\cos at - 1)$

22. $\int_0^t \frac{1}{x}\cdot(e^{-2x} - e^{-3x})\,dx$

23. $\frac{1}{2}\left(\sin t - \cos t + e^{-t}\right)$

24. $\frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t)$

25. $\frac{1}{9}\times t\cos(t/3)$

26. (i) $\frac{1}{2a}t\sin at$ (ii) $\frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$ (iii) $\frac{1}{8}(e^{-2t} + \sin 2t - \cos 2t)$

10. लाप्लास रूपान्तर द्वारा अवकल समीकरणों को हल करना :

(To Solve Differential Equations by Laplace Transform) :

इससे पूर्व भी हमने अवकल समीकरणों को हल करना सीखा था जिसमें दी हुई अवकल समीकरण का पूरक फलन (Complementary function) तथा विशेष समाकल (particular integral) ज्ञात करते हैं और दोनों के योग से सम्पूर्ण हल (Complete solution) ज्ञात हो जाता है।

सम्पूर्ण हल = पूरक फलन + विशेष समाकल

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

लेकिन अवकल समीकरणों को लाप्लास रूपान्तर के प्रयोग से भी बहुत ही सरलता एवं छोटी विधि (Simple and shorter method) से हल किया जा सकता है। लाप्लास रूपान्तर से निम्न प्रकार की समीकरणों को हल किया जा सकता है–

1. **स्थिर गुणांकों वाली रैखिक अवकल समीकरणें (Linear differential equs. with constant coefficients)**
2. **चल गुणांकों वाली रैखिक अवकल समीकरणें (Linear differential equs. with variable coefficients)**

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

3. साधारण युगपत अवकल समीकरणें (Ordinary simultaneous Differential equations)
4. आंशिक अवकल समीकरणें (Partial differential equations)

11. अवकल समीकरणों को हल करना (To Solve the Differential Equations) :

समीकरणों को लाप्लास रूपान्तर के प्रयोग से हल करने की कार्यविधि आगे उदाहरणों द्वारा समझाई गई है।

उदाहरण 16. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 1$ को लाप्लास रूपान्तर के प्रयोग से हल करो; दिया है कि $y(0) = 0, \frac{dy}{dx} = 1$ जब $x = 0$

हल : अवकल समी॰ $\quad y'' + 4y' + 8y = 1$

दोनों ओर लाप्लास रूपान्तर करने पर, $L(y'' + 4y' + 8y) = L(1)$ ...(1)

$\because \quad L(y'') = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)$

तथा $\quad L(y') = [sf(s) - f(0)], L(y) = f(s), L(1) = \frac{1}{s}$

(1) में ये मान रखने पर,

$$[s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)] + 4[sf(s) - f(0)] + 8f(s) = \frac{1}{s}$$

इसमें $f(0) = y(0) = 0$ तथा $f'(0) = y'(0) = 1$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad [s^2 f(s) - s \times 0 - 1] + 4sf(s) - 4 \times 0 + 8f(s) = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow \quad (s^2 + 4s + 8) f(s) = \frac{1}{s} + 1 \Rightarrow f(s) = \frac{1+s}{s(s^2 + 4s + 8)}$

$\Rightarrow \quad f(s) = \frac{1}{8s} + \frac{-\frac{s}{8} + \frac{1}{2}}{s^2 + 4s + 8}$ (आंशिक भिन्नें बनाने पर) $= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{8} \cdot \frac{s-4}{s^2 + 4s + 8}$

प्रतिलोम रूपान्तर (Inverse transform) करने पर,

$$L^{-1} f(s) = \frac{1}{8} L^{-1} \frac{1}{s} - \frac{1}{8} L^{-1} \frac{s-4}{s^2 + 4s + 8}$$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8} \cdot 1 - \frac{1}{8} L^{-1} \frac{(s+2) - 6}{(s+2)^2 + 4}$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} L^{-1} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4} - \frac{6}{8} L^{-1} \frac{1}{(s+2)^2 + 4}$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \times e^{-2x} \cos 2x - \frac{3}{8} \cdot e^{-2x} \sin 2x$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{8} - \frac{e^{-2x}}{8} (\cos 2x - 3 \sin 2x)$ उत्तर

उदाहरण 17. अवकल समीकरण $(D^2 + 1) y = 0$ को लाप्लास रूपान्तर के प्रयोग से हल कीजिए।

दिया है : $x = 0$ पर $y = 1, \frac{dy}{dx} = 1$

हल : अवकल समीकरण $(D^2 + 1) y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \Rightarrow y'' + y = 0$

दोनों ओर का लाप्लास रूपान्तर करने पर,

$L(y'' + y) = L(0) \Rightarrow L(y'') + L(y) = 0$ ...(1)

$\because \quad L(y'') = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)$ तथा $L(y) = f(s)$

(1) में ये मान रखने पर,

$\Rightarrow \quad [s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)] + f(s) = 0$

$\Rightarrow \quad [s^2 f(s) - sy(0) - y'(0)] + f(s) = 0$

$\Rightarrow \quad [s^2 f(s) - s \times 1 - 1] + f(s) = 0$ ($\because f(0) = y(0) = 1$ तथा $f'(0) = y'(0) = 1$ दिया है)

$\Rightarrow \quad (s^2 + 1) f(s) = s + 1 \Rightarrow f(s) = \frac{s+1}{s^2 + 1}$

$\Rightarrow \quad f(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$

प्रतिलोम रूपान्तर (Inverse transform) करने पर,

$$L^{-1} f(s) = L^{-1} \frac{s}{s^2 + 1} + L^{-1} \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$y = \cos x + \sin x$$ उत्तर

प्रश्न 18. समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \cos 2t$ को हल करो।

दिया है $x(0) = c_1$ तथा $x'(0) = c_2$

हल : दोनों ओर का लाप्लास रूपान्तर करने पर,

$[s^2 \bar{x} - sx(0) - x'(0)] + 9\bar{x} = \frac{s}{s^2 + 2^2}$, जहाँ $L(\bar{x}) = \{x(t)\}$

$\Rightarrow \quad s^2 \bar{x} - sc_1 - c_2 + 9\bar{x} = \frac{s}{s^2 + 4}$

$\Rightarrow \quad (s^2 + 9)\bar{x} = c_1 s + c_2 + \frac{s}{s^2 + 4}$

$\Rightarrow \quad \bar{x} = c_1 \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + c_2 \cdot \frac{1}{s^2 + 9} + \frac{s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)}$

$= c_1 \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + c_2 \cdot \frac{1}{s^2 + 9} + \frac{1}{5} \left[\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{s}{s^2 + 9} \right]$

(आंशिक भिन्नों द्वारा)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

दोनों ओर का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर करने पर,

$$L(\bar{x}) = c_1 L^{-1}\frac{s}{s^2+9} + c_2 L^{-1}\frac{1}{s^2+9} + \frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+9}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = c_1 \cos 3t + \frac{c_2}{3}\cdot\sin 3t + \frac{1}{5}[\cos 2t - \cos 3t]$$

$$= \left(c_1 - \frac{1}{5}\right)\cos 3t + \frac{c_2}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

उत्तर

उदाहरण 19. निम्न युग्मत समीकरणों को हल करो।

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = -e^{-t}$$

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 0$$

दिया है : $x(0) = -1, \; y(0) = 1$

हल : दोनों समीकरणों का लाप्लास रूपान्तर करने पर,

$$[s\bar{x} - x(0)] + [s\bar{y} - y(0)] + \bar{x} = -\frac{1}{s+1} \quad \left\{\because L\{e^t\} = \frac{1}{s-1},\; L\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}\right\}$$

तथा $[s\bar{x} - x(0)] + 2[s\bar{y} - y(0)] + 2\bar{x} + 2\bar{y} = 0$ जहाँ $L(\bar{x}) = \{x(t)\}$, $L\bar{y} = \{y(t)\}$

इसमें $x(0) = -1$ तथा $y(0) = 1$ रखने पर,

$$s\bar{x} + 1 + s\bar{y} - 1 + \bar{x} = -\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad (s+1)\bar{x} + s\bar{y} = -\frac{1}{s+1} \qquad \ldots(1)$$

तथा

$$s\bar{x} + 1 + 2s\bar{y} - 2 + 2\bar{x} + 2\bar{y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{x} + 2(s+1)\bar{y} = 1 \qquad \ldots(2)$$

(1) तथा (2) को $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ के लिए हल करने पर,

$$\bar{x} = -\frac{s+2}{s^2+2s+2}, \qquad \bar{y} = -\frac{s^2+3s+3}{(s^2+2s+2)(s+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = -\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}\right], \quad \bar{y} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \quad \text{(आंशिक भिन्नों द्वारा)}$$

प्रतिलोम रूपान्तर करने पर,

$$L(\bar{x}) = -\left[L^{-1}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + L^{-1}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

तथा $$L(\bar{y}) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

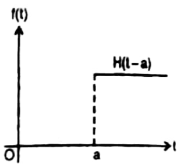
$$y(t) = e^{-t}(1 + \sin t)$$

उत्तर

11. एकक पद फलन (Unit Step Function) :

एकक पद फलन को $U(t-a)$ अथवा $H(t-a)$ से निरूपित करते हैं। यह एक बहुत ही सरल असतत (simplest discontinuous) फलन है और उन फलनों के प्रतिलोम रूपान्तर (inverse Laplace Transforms) ज्ञात करने में सहायक है जिन्हें हम सामान्य विधि से ज्ञात नहीं कर सकते।

एकक पद फलन (unit step function) को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है :



$$U(t-a) \;[\text{or } H(t-a)] = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$$

जब $a = 0$, तब एकक पद फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$U(t)\;[\text{or } H(t)] = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$$

एकक पद फलन का लाप्लास रूपान्तर,

$$L\{U(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,U(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}\cdot 0\,dt + \int_a^\infty e^{st}\cdot 1\cdot dt$$

$$= 0 + \left|\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty = \frac{1}{s}e^{-as}$$

$$\Rightarrow \quad L\{U(t-a)\} = \frac{1}{s}e^{-as} \qquad \text{(सूत्र)}$$

जब $a = 0$, $\quad L\{U(t)\} = \frac{1}{s}$

उदाहरण 20. निम्न फलन को एकक पद फलन (unit step function) के रूप में निरूपित कीजिए

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 2 \\ 3-t, & 2 < t < 3 \end{cases}$$

हल : $f(t) = (t-1)[U(t-1) - U(t-2)] + (3-t)[U(t-2) - U(t-3)]$

$$= (t-1)\,U(t-1) - 2(t-2)\,U(t-2) + (t-3)\,U(t-3)$$

$$L\{f(t)\} = L[(t-1)\,U(t-1)] - 2L[(t-2)\,U(t-2)] + L[(t-3)\,U(t-3)]$$

$$= e^{-s}L(t) - 2e^{-2s}L(t) + e^{-3s}L(t)$$

$$= (e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{e^{-s}}{s^2}[1 - 2e^{-s} + e^{-2s}] = \frac{e^{-s}}{s^2}\left(1 - e^{-s}\right)^2$$

उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

12. आवर्ती फलनों का लाप्लास रूपान्तर (Laplace Transform of Periodic Functions) :

माना कि $f(t)$ एक आवर्ती (periodic) फलन है और T उसका आवर्त (period) है अर्थात् $f(t+T) = f(t)$, तब लाप्लास रूपान्तर की परिभाषा से

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\, dt + ...$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + ... + ... + ...$$

जहाँ $I_1 = \int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt$; $I_2 = \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\, dt$; $I_3 = \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\, dt + ...$

माना कि $t = T + u$ तब $dt = du$

$$I_2 = \int_0^{T} e^{-s(T+u)} f(T+u)\, dt = e^{-st} \int_0^{T} e^{-su} f(u)\, du \quad [\because f(T+u) = f(u)]$$

$$= e^{-st} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt = e^{-st} \cdot I_1$$

$$I_3 = \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{T} e^{-s(2T+u)} f(2T+u)\, dt$$

$$= e^{-2sT} \int_0^{T} e^{-su} \cdot f(u)\, du$$

$$= e^{-2sT} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt = e^{-2st} I_1$$

इसी प्रकार से, $I_4 = e^{-2sT} I_1$; $T_5 = e^{-2sT} I_1, ..., ...$

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = I_1 + e^{-sT} I_1 + e^{-2st} I_1 + e^{-3sT} I_1 + ... \infty$$

$$= I_1 [1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + ... \infty]$$

$$= I_1 \times \frac{1}{1 - e^{-sT}} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} I_1$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt \qquad [(1) \text{ से}]$$

उदाहरण 21. निम्न आवर्ती फलन $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए।

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < t < L \\ -1 & , \ L < t < 2L \end{cases}$$

हल : आवर्ती फलन सूत्र, $L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-st}} \int_0^{T} e^{-sT} f(t)\, dt$ से

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2sL}} \int_0^{2L} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2sL}} \left[\int_0^{L} e^{-st} \cdot 1 \cdot dt + \int_L^{2L} e^{-st} (-1)\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2sL}} \left[\left| \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{L} - \left| \frac{e^{-st}}{-s} \right|_L^{2L} \right]$$

$$= \frac{1}{s(1 - e^{-2sL})} \left[-\left(e^{-sL} - 1\right) + \left(e^{-2sL} - e^{-sL}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{s\left(1 - e^{-2sL}\right)} \left[1 - 2e^{-sL} + e^{-2sL} \right]$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-sL}\right)^2}{s\left(1 - e^{-2sL}\right)} = \frac{1 - e^{-sL}}{s\left(1 + e^{-sL}\right)} \qquad \text{उत्तर}$$

नोट : आवर्ती फलन $f(t)$ का आवर्त (period) $T = L$ है।

उदाहरण 22. निम्न आवर्ती फलन का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & , \ 0 < t < \pi/\omega \\ 0 & , \ \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

हल : आवर्ती फलन, $L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-st}} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt$ से

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-2s\pi/\omega}} \left[\int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \cdot \sin \omega t\, dt + 2 \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} e^{-st} \cdot 0\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s/\omega}} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + 0 \right] = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)\left(1 - \frac{e^{-2\pi s}}{\omega}\right)} \qquad \text{उत्तर}$$

नोट : आवर्ती फलन $f(t)$ का आवर्त (period) $T = \frac{\pi}{\omega}$ है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

अभ्यासमाला 16 (2)

निम्न अवकल समीकरणों को लाप्लास रूपान्तर के प्रयोग से हल करो :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 3t$, दिया है $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 5e^{-x}$, दिया है $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$
3. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}$, दिया है $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
4. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 5\sin t$, दिया है $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$, दिया है $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 18x$, दिया है $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
7. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 2\cos 2t - 4\sin 2t$, $t = 0$ पर $x = 0$, $x' = 0$
8. $(D^2 - 2D + 2)y = 0$, दिया है $t = 0$ पर $y = Dy = 1$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)
9. $(D^2 + 4D + 5)y = e^{-x}\sin 2x$, दिया है $x = 0$ पर $y = 4$, $y' = 5$
10. $(D + 2)^4 y = 4e^{-2x}$, दिया है $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$
11. $(D^2 + 3D + 2)y = 0$, दिया है $t = 0$ पर $y = y_0, Dy = y_1$
12. $(D^3 - D)x = 2\cos t$, दिया है $t = 0$ पर $x(0) = 3$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 1$
13. $(D^3 + 2D - D - 2)y = 0$, दिया है $x = 0$ पर $y = 1$, $Dy = 2, D^2y = 2$

निम्न युग्मत समीकरणों को हल करो :

14. $\frac{dx}{dt} - y = e^t$, $\frac{dy}{dt} + x = \sin t$ दिया है, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$
15. $\frac{dx}{dt} + y = 0$, $\frac{dy}{dt} - x = 0$ दिया है, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$
16. $\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0$, $\frac{dy}{dt} - x + y = 0$ दिया है, $x(0) = y(0) = 1$

निम्न आवर्ती फलनों के लाप्लास रूपांतर ज्ञात करो।

17. 2π-आवर्ती फलन निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$f(t) = \begin{cases} t & , \ 0 < t < \pi \\ \pi - t & , \ \pi < t < 2\pi \end{cases}$$, इसका लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

18. $\frac{2\pi}{\omega}$–आवर्ती फलन निम्न प्रकार से परिभाषित है–

$$f(t) = \begin{cases} a\sin \omega t & , \ 0 < t < \pi/\omega \\ 0 & , \ \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$, इसका लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

19. $2l$–आवर्ती फलन निम्न प्रकार से परिभाषित है–

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{l} & , \ 0 < t < l \\ \frac{2l - t}{l} & , \ l < t < 2l \end{cases}$$, इसका लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

20. निम्न फलन $f(t)$ को एकक पद फलन (unit step function) के रूप में निरूपित करो तथा उसका लाप्लास रूपान्तर भी ज्ञात करो।

$$f(t) = \begin{cases} t - 1 & , \ 1 < t < 2 \\ 3 - t & , \ 2 < t < 3 \end{cases}$$

संकेत : (देखो उदाहरण 20)

21. निम्न फलन $f(t)$ को एकक पद फलन (unit step function) के रूप में निरूपित करो तथा उसका लाप्लास रूपान्तर भी ज्ञात करो।

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{for } 0 < t < 1 \\ 4t & \text{for } t > 1 \end{cases}$$

उत्तरमाला 16 (2)

1. $y = \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{8}\sin 3t$
2. $y = e^{-x} + 2\sin 2x + \cos 2x$
3. $y = \frac{1}{2}e^{-t}(t^2 + 2t)$
4. $y = 2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t - 2\cos t + \sin t$
5. $y = e^{2x}(\cos x + \sin x)$
6. $y = 2x + \pi\sin 3x$
7. $x = \frac{3}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\sin 2t - \frac{3}{5}e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$
8. $y = e^x\cos x$
9. $y = \frac{1}{5}e^{-2x}(21\cos x + 67\sin x) - \frac{1}{5}e^{-x}\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$
10. $y = e^{-2x}(2x^2 + 2x - 1)$
11. $y = (2y_0 + y_1)e^{-t} - (y_0 + y_1)e^{-2t}$
12. $x = 2 + 2e^t - e^{-t} - \sin t$
13. $y = \frac{5}{3}e^x - e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$
14. $x = \frac{1}{2}(e^t + \cos t + 2\sin t - t\cos t)$, $y = \frac{1}{2}(t\sin t - e^t + \cos t - \sin t)$
15. $x = \cos t$, $y = \sin t$
16. $x = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) - \frac{1}{2}\cos 2t$
17. $\frac{1}{s^2(1 + e^{-\pi s})}[1 - (1 + \pi s)e^{-\pi s}]$
18. $\frac{a\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\pi s/\omega})}$
19. $\frac{1 - e^{-l/s}}{ls^2(1 + e^{-ls})}$
21. $\frac{2}{s^3} + \left(\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3}\right)e^{-s}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

17 बीटा और गामा फलन
(Beta And Gamma Functions)

1. बीटा तथा गामा फलन (Beta and Gamma Functions) :

निश्चित समाकलनों के समाकल ज्ञात करने के लिए प्रायः बीटा तथा गामा फलनों का, जिनका वर्णन आगे किया गया है, प्रयोग किया जाता है। अतः इनका अध्ययन आवश्यक एवं महत्त्वपूर्ण है। इनका प्रयोग भौतिकी, यान्त्रिकी, सांख्यिकी एवं विज्ञान की अन्य शाखाओं में भी किया जाता है।

2. बीटा फलन (Beta Functions) :

निश्चित समाकल $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$, जो प्रथम आयलरी समाकल (First Eular's Integral) के नाम से जाना जाता है, को m तथा n का बीटा फलन कहते हैं। इसे $\beta(m, n)$ अथवा $B(m, n)$ से निरूपित करते हैं अर्थात्

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx, \quad m > 0, n > 0$$

यह m तथा n के केवल धनात्मक मानों के लिए सत्य है।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

3. बीटा फलनों के मान (Values of the Beta Functions):

1. जब केवल n धन पूर्णांक (+ ve Integer) है, तब

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-1)}$$

2. जब केवल m धन पूर्णांक (+ve Integer) है, तब

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{(m-1)!}{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)}$$

3. जब m तथा n दोनों धन पूर्णांक हैं (both + ve Integers) है, तब

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(n+m-1)!}$$

4. बीटा फलन का एक मुख्य गुण (A Main Property of Beta Functions) :

बीटा फलन m तथा n में सममिताकार (symmetrical) होते हैं अर्थात् $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

उपपत्ति (Proof) : परिभाषा से, $\quad \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

इसमें निश्चित समाकल के गुण $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ का प्रयोग करने पर,

$$\beta(m, n) = \int_0^1 (1-x)^{m-1}[1-(1-x)]^{n-1}\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}x^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \beta(n, m) \quad \text{(सिद्धम्)}$$

5. बीटा फलनों का मानों को ज्ञात करना (To Find the Values of the Beta Functions) :

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

(i) जब केवल n धनात्मक पूर्णांक है, तब $(1-x)^{n-1}$ को प्रथम फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$\beta(m, n) = \left|(1-x)^{n-1} \times \frac{x^m}{m}\right|_0^1 + \int_0^1 (n-1)(1-x)^{n-2} \cdot \frac{x^m}{m}\,dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 (1-x)^{n-2}x^m\,dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{m(m+1)}\int_0^1 (1-x)^{n-3}x^{m+1}\,dx \quad \text{(पुनः खण्डशः समाकलन से)}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 3\cdot2\cdot1}{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\,dx$$

(खण्डशः समाकलन को बार-बार दोहराने पर)

$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-2)} \cdot \left|\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}\right|_0^1$$

$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-2)(m+n-1)} \quad \text{(सूत्र नं० 1)}$$

(ii) यदि केवल m धन पूर्णांक है, तब $(1-x)^{m-1}$ को प्रथम फलन लेकर उपरोक्त की भाँति बार-बार खण्डशः समाकलन करने पर,

$$\beta(n, m) = \frac{(m-1)!}{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-2)(n+m-1)} \quad \text{(सूत्र नं० 2)}$$

(iii) यदि m तथा n दोनों धनात्मक है, तब x^{m-1} तथा $(1-x)^{n-1}$ में से किसी को भी प्रथम फलन मानकर $\beta(m, n)$ ज्ञात कर सकते हैं। अतः

सूत्र (1) से, $\quad \beta(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-1)}$

$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-1)} \times \frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots2\cdot1}{(m-1)(m-2)\ldots\ldots2\cdot1}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{1.2.\ldots\ldots(m-2)(m-1)m.\ldots\ldots(m+n-1)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!} \quad \text{(सूत्र नं० 3)}$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

6. बीटा फलनों के अन्य रूप (Some Other Forms of Beta Functions):

बीटा फलनों को निम्नलिखित अन्य रूपों में रूपान्तरित किया जा सकता है :

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx \quad ...(1)$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta \quad ...(2)$$

उपपत्ति (proof) :

(i) $x = \frac{1}{1+y}$ रखने पर, $dx = \frac{-1}{(1+y)^2}$ तथा $x = 0$ पर $y = \infty$; $x = 1$ पर $y = 0$

$$\therefore \quad \beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \int_\infty^0 \left(\frac{1}{1+y}\right)^{m-1} \times \left(\frac{y}{1+y}\right)^{n-1} \times \frac{-1}{(1+y)^2}dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}dy = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx \quad (y \text{ को } x \text{ में बदलने पर})$$

(ii) $\because$ बीटा फलन सममिताकार (symmetrical) है अतः m तथा n को परस्पर बदला जा सकता है।

$$\therefore \quad \beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$

(iii) बीटा फलन में $x = \sin^2\theta$ रखने पर,

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{m-1}(1-\sin^2\theta)^{n-1} \times 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

अतः यदि समाकल किसी भी उपरोक्त रूप में है तब बीटा फलनों के सूत्रों का प्रयोग कर सकते हैं।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. $\int_0^1 x^6(1-x)^7 dx$ का मान ज्ञात करो।

हल : $\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$

$\because \quad m-1 = 6,\ n-1 = 7 \Rightarrow m = 7,\ n = 8$

$$\therefore \quad \beta(7,8) = \int_0^1 x^6(1-x)^7 dx = \frac{6!\times 7!}{(7+8-1)!}$$

$$= \frac{6!\times 7!}{14!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{14\times13\times12\times11\times10\times9\times8} = \frac{1}{24024} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. $\int_0^1 x^3(1-\sqrt{x})^6 dx$ का मान ज्ञात करो।

हल : $\sqrt{x} = t$ रखने पर, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$

$$\int_0^1 x^3(1-\sqrt{x})^6 dx = \int_0^1 t^6(1-t)^6\cdot 2t\,dt = 2\int_0^1 t^7(1-t)^6 dt$$

$$= 2\times\frac{7!\times 6!}{(8+7-1)!} \quad [\because m-1 = 7,\ n-1 = 6]$$

$$= 2\times\frac{7!\times 6!}{14!} = \frac{1}{12012} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो कि $\int_0^1 (1-x^5)^{-3/4}dx = \frac{1}{5}\beta\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)$

हल : $x^5 = t$ रखने पर, $x = t^{1/5}$, $dx = \frac{1}{5}t^{-4/5}$

$$\int_0^1 (1-x^5)^{-3/4}dx = \int_0^1 (1-t)^{-3/4}\times\frac{1}{5}t^{-4/5}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int t^{-4/5}(1-t)^{-3/4}dt = \frac{1}{5}\beta(m,n) \quad ...(1)$$

जहाँ $m-1 = -\frac{4}{5}$ तथा $n-1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{5},\ n = \frac{1}{3}$

(1) में, t m तथा n के मान रखने पर,

$$\therefore \quad \int_0^1 (1-x^5)^{-3/4}dx = \frac{1}{5}\beta\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right) \quad \text{सिद्धम्}$$

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx = \beta(m,n)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

हल : $\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

दूसरे समाकल में $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{1}{y^2}$ रखने पर, नई सीमायें ∞ से 1 होंगी।

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_\infty^1 \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{m+n}} \times \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_1^\infty \frac{y^{m+n}}{(y+1)^{m+n} \times y^{n+1}}\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_1^\infty \frac{y^{m+n}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \beta(m, n)$$ (सिद्धम्)

7. गामा फलन (Gamma Functions) :

अनन्त समाकल (Infinite Integral) $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx, n > 0$ को, जो द्वितीय आयलरी समाकल (Second Eular's Integral) के नाम से जाना जाता है, गामा फलन कहते हैं और $\Gamma(n)$ से निरूपित करते हैं अर्थात्

गामा फलन $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx, \; n > 0$ (सूत्र)

8. गामा फलनों के मान ज्ञात करना जब $n = 1, 2, 3, \ldots, n, n+1$

∵ गामा फलन $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$ ...(1)

(i) इसमें $n = 1$ रखने पर, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left|\frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty = -(0-1) = 1 \Rightarrow \Gamma(1) = 1$

(ii) (1) में $n = 2$ रखने पर $\Gamma(2) = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \left|x \cdot \frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x}\,dx$

$$= 0 + \left|\frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty = -(0-1) = 1 \Rightarrow \Gamma(2) = 1$$

(iii) (1) में $n = 3$ रखने पर $\Gamma(3) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = \left|x^2 \cdot \frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-x}\,dx$

$$= 0 + 2\left[\left|x \cdot \frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x}\,dx\right] = 2\left[0 + \left|\frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty\right]$$

$$= 2 \times (0+1) = 2 = 2! \Rightarrow \Gamma(3) = 2!$$

(iv) $n = n + 1$ रखने पर, $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \left|x^n \cdot \frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty + \int n x^{n-1} e^{-x}\,dx$

$$= 0 + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx = n\,\Gamma(n)$$

$$= n(n-1)(n-2) \ldots \times 2 \times 1 \cdot \int_0^\infty e^{-x}\,dx$$ (n बार खण्डशः समाकलन करने पर)

$$= n(n-1)(n-2) \ldots \times 2 \times 1 \times \left|\frac{e^{-x}}{-1}\right|_0^\infty$$

$$= n! \times [-(0-1)] = n! \times 1 = n! \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

सारांश (Summary) : **याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)**

विद्यार्थी गण निम्नलिखित समाकलनों के परिणामों का सीधे प्रयोग कर सकते हैं अतः उन्हें कण्ठस्थ कर लें।

(1) $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(2) = 1$; $\Gamma(3) = 2!$

$\Gamma(4) = 3!$; $\Gamma(n) = (n-1)!$; $\Gamma(n+1) = n!$

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$

(3) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2) = \ldots$

$\Rightarrow \Gamma(6) = 5\,\Gamma(5) = 5 \times 4\,\Gamma(4) = 5 \times 4 \times 3\,\Gamma(3) = 5 \times 4 \times 3 \times 2\,\Gamma 2$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \Gamma 1 = 120$

उदाहरण 5. $\int_0^\infty x^6 e^{-x}\,dx$ का मान ज्ञात करो।

हल : ∵ $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx = \Gamma(n)$ ∴ $n = 7$ रखने पर, $\int_0^\infty x^6 e^{-x}\,dx = \Gamma(7) = 6! = 720$ उत्तर

उदाहरण 6. $\int_0^\infty x^{7/2} e^{-4x}\,dx$ का मान ज्ञात करो।

हल : $4x = y$ तथा $dx = \frac{1}{4}dy$ रखने पर, $y = 0$, जब $x = 0$ तथा $y = \infty$ जब $x = \infty$.

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\int_0^\infty x^{7/2} e^{-4x}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{y}{4}\right)^{7/2} \times e^{-y} \times \frac{1}{4} dy$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{9/2} \int_0^\infty y^{7/2} e^{-y} dy = \frac{1}{2^9} \int y^{(9/2-1)} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{512} \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{512} \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} = \frac{105\sqrt{\pi}}{8192}$$

9. बीटा तथा गामा फलन में सम्बन्ध (Relation between Beta and Gamma Functions) :

बीटा तथा गामा फलन के मध्य निम्नलिखित सम्बन्ध (relation) है :

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \ (m, n > 0) \qquad \text{(सूत्र)}$$

विद्यार्थी गण इस सम्बन्ध को कण्ठस्थ कर लें और जहां भी आवश्यकता हो, सीधे प्रयोग करें।

उदाहरण 7. सिद्ध करो कि

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$ (iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

हल : बीटा फलन की परिभाषा से, $\beta(m, n) = \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$

(i) इसमें $x = \sin^2\theta$, $dx = 2\sin\theta\cos\theta$, सीमा 0 से $\frac{\pi}{2}$ रखने पर,

$$\beta(m, n) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2}\theta \cos^{2n-2}\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

लेकिन $\beta(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \qquad \text{सिद्धम्}$$

(ii) (i) में $2m - 1 = p$ अर्थात् $m = \frac{p+1}{2}$ तथा $2n - 1 = q$ अर्थात् $n = \frac{q+1}{2}$ रखने पर,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)} \qquad \text{सिद्धम्}$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$ में $p = q = 0$

$$\int_0^{\pi/2} 1 \cdot d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)} \Rightarrow \left|\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \text{सिद्धम्}$$

10. गामा फलन के अन्य रूप (Some Other Forms of Gamma Functions) :

गामा फलन की परिभाषा से, $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1} \cdot e^{-x} dx$ ...(1)

(i) $x = \log\frac{1}{y}$ या $y = e^{-x}$ तथा $e^{-x} dx = -dy$ रखने पर,

$$\Gamma(n) = -\int_1^0 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy \Rightarrow \Gamma(n) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} = \Gamma(n) \qquad \text{...(2)}$$

(ii) (1) में $x^n = y$ तथा $nx^{n-1} dx = dy$ रखने पर

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{1}{n} e^{-y^{1/n}} dy \Rightarrow \Gamma(n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y^{1/n}} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-y^{1/n}} dy = n\,\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \qquad \text{...(3)}$$

उदाहरण 8. सिद्ध करो कि $\Gamma(n) \times \Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ $(0 < n < 1)$

हल : बीटा फलन की परिभाषा से,

$$\because \quad \beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \qquad \text{[अनुच्छेद 6 (ii) से]}$$

$$\therefore \quad \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

इसमें $m + n = 1$ अर्थात् $m = 1 - n$ रखने पर,

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(1-n)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow \quad \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

$\Rightarrow \quad \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ सिद्धम्

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

हल : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{1/2}\theta}{\sin^{1/2}\theta}\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\theta \cos^{1/2}\theta\, d\theta \quad \text{...(1)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\,\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

नोट : (1) में $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$ का प्रयोग किया गया है।

उदाहरण 10. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ के मान ज्ञात करो।

हल : हम जानते हैं कि $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ [देखो अनुच्छेद 7.8 (iv)] ...(1)

(i) $n = -\frac{1}{2}$ रखने पर, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\pi} = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ उत्तर

(ii) (1) में $n = -\frac{3}{2}$ रखने पर, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow -2\sqrt{\pi} = -\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ उत्तर

(iii) (1) में $n = -\frac{5}{2}$ रखने पर, $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2}\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{\pi} = -\frac{5}{2}\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ उत्तर

उदाहरण 11. $\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहां उदाहरण 10 वाली विधि प्रयोग न करें चूंकि $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$ तक के सभी मान ज्ञात करने पड़ेंगे। निम्न विधि का प्रयोग करें।

हम जानते हैं कि $\Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ (सूत्र)

$n = -\frac{9}{2}$ रखने पर, $\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(-\frac{9}{2}\right)\pi} \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{-\pi}{\sin\frac{9\pi}{2}\times\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$

$$= \frac{-\pi}{1\times\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}} = \frac{-2^5\times\sqrt{\pi}}{945} = \frac{-32\pi}{945}$$ उत्तर

उदाहरण 12. $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(3)}$ का मान ज्ञात करो।

हल : हम जानते हैं कि $\Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

$\therefore \quad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{\pi}{\sin(1/4)\pi}}{2!} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ उत्तर

उदाहरण 13. गामा फलन के प्रयोग से $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$ का मान ज्ञात करो।

हल : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta \cos^{-1/2}\theta\, d\theta$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\,\Gamma(1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{2\times(1)}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}}{2} = \frac{\pi}{2\sin(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 14. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{7/3} (\sec x)^{1/2}\, dx$ का मान ज्ञात करो।

हल : $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{7/3} (\sec x)^{1/2}\, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{7/3} (\cos x)^{-1/2}\, dx$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{7}{3}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\frac{7}{3}-\frac{1}{2}+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{23}{12}\right)}$$ उत्तर

उदाहरण 15. सिद्ध करो कि $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{n-1/2}}{n^{1/2}}, n > 1$

हल : माना कि $P = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)$

अब P के मान उल्टे क्रम में रखने पर,

$$P = \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow P^2 = \left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\ldots\left[\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} \quad \ldots(1)$$

त्रिकोणमिति से, $\because$ $$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right) \quad \ldots(2)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin n\theta}{n\theta}\times\frac{n\theta}{\sin\theta}\right) = 1\times n\times 1 = n \quad \ldots(3)$$

$$\lim_{\theta\to 0} 2^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$= 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{n-1}{n}\pi$$ ($\theta = 0$ रखने पर) ...(4)

(3) तथा (4) के मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}}$$

यह मान (1) में रखने पर $P^2 = \frac{\pi^{n-1}}{n/2^{n-1}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n} \Rightarrow P = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}}$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}}$$ सिद्धम्

उदाहरण 16. सिद्ध करो कि $\beta(m,n) = \beta(m+1,n) + \beta(m,n+1),\ m,n > 0$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

हल : $\beta(m,n)$ के सूत्र से, $\beta(m+1,n) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$ तथा $\beta(m,n+1) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$

जोड़ने पर, $\beta(m+1,n) + \beta(m,n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n) + \Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$

$$= \frac{m\,\Gamma(m)\Gamma(n) + \Gamma(m)\cdot n\,\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)}$$

$$= \frac{(m+n)\Gamma(m)\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \beta(m,n)$$ सिद्धम्

उदाहरण 17. सिद्ध करो कि $\frac{\beta(m,n+1)}{n} = \frac{\beta(m+1,n)}{m} = \frac{\beta(m,n)}{m+n}$

हल : $$\frac{\beta(m,n+1)}{n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(m)\,n\,\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)}$$

$$= \frac{1}{m+n}\cdot\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{\beta(m,n)}{m+n}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि, $\frac{\beta(m+1,n)}{m} = \frac{\beta(m,n)}{m+n}$ सिद्धम्

उदाहरण 18. सिद्ध करो कि

(i) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx \times \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \pi$

हल : (i) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}x\cos^0 x\,dx$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+0+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2} x \cos^0 x\,dx$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{-\frac{1}{2}+0+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx \times \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ {(i) तथा (ii) से}

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi} = \pi$$ उत्तर

उदाहरण 19. सिद्ध करो कि $\int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{1/n}} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}$

हल: $x^n = a^n \sin^2\theta$ अर्थात् $x = a \sin^{(2/n)}\theta$,

$dx = \frac{2a}{n}\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta \cdot \cos\theta\,d\theta$ तथा सीमा 0 से $\frac{\pi}{2}$ रखने पर,

$$\int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{1/n}} = \frac{2a}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta \cdot \cos\theta\,d\theta}{a\cos^{2/n}\theta}$$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta \cdot \cos^{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{n} \times \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{2}{n}-1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\frac{2}{n}+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\frac{2}{n}-1+1-\frac{2}{n}+2}{2}\right)}$$ (सूत्र से)

$$= \frac{1}{n} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n}\times\frac{\pi}{\sin(\pi/n)}$$ (सूत्र से)

$$= \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$$ सिद्धम्

उदाहरण 20. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$ का मान ज्ञात करो।

हल: $x^n = \sin^2\theta$ अर्थात् $x = (\sin\theta)^{2/n}$, $dx = \frac{2}{n}(\sin\theta)^{\frac{2}{n}-1}\cdot\cos\theta$ तथा नई सीमायें 0 से $\frac{\pi}{2}$ रखने पर

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2}{n}(\sin\theta)^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\cdot\cos\theta\,d\theta}{(1-\sin^2\theta)^{(1/n)}} = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\cdot(\cos\theta)^{\left(1-\frac{2}{n}\right)}\,d\theta$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\frac{\Gamma\left[\frac{\left(\frac{2}{n}-1\right)+1}{2}\right]\Gamma\left[\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)+1}{2}\right]}{2\Gamma\left(\frac{\frac{2}{n}-1+1-\frac{2}{n}+2}{2}\right)} = \frac{2}{n}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2\Gamma(1)}$$

$$= \frac{2}{n}\times\frac{\pi}{\sin(\pi/n)} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$$ उत्तर

अभ्यासमाला 17

1. दिखाओ कि $\beta(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$
2. $\int_0^1 x^5(1-x)^4\,dx$ का मान ज्ञात करो।
3. $\int_0^1 (1-x^3)^{-1/2}\,dx$ का मान ज्ञात करो।
4. $\int_0^3 x(27-x^3)^{1/3}\,dx$ का मान ज्ञात करो।
5. $\int_0^1 x(1-x^{1/3})^6\,dx$ का मान ज्ञात करो।
6. $\int_0^\infty 8x^8 e^{-x^8}\,dx$ का मान ज्ञात करो।
7. $\int_0^\infty x^{3/2}e^{-4x}\,dx$ का मान ज्ञात करो।
8. सिद्ध करो कि $\Gamma(n+1) = n!$
9. सिद्ध करो कि $\Gamma n+1 = n\Gamma n$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)
10. $\Gamma 8, \Gamma\left(\frac{7}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$ के मान ज्ञात करो।
11. सिद्ध करो कि $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
12. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ का मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)
13. सिद्ध करो कि $\Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2006)
14. सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\cos^m x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

15. सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x \, dx = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\beta(m, n)$

16. दिखाइये कि

(i) $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = 2^{1/3}\cdot\sqrt{\pi}$ (ii) $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}}\cdot\sqrt{\pi}$

17. $\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{8}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{8}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{7}{8}\right)$ का मान ज्ञात करो।

संकेत: $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{1/2}}$ का प्रयोग करो।

18. $\Gamma\left(\frac{1}{25}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{25}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{25}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{24}{25}\right)$ का मान ज्ञात करो।

19. $\int_0^{\pi/2} \sin^8\theta\cdot\cos^6\theta \, d\theta$ का मान ज्ञात करो।

20. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{9/2} (\sec x)^{1/2} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

21. $\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta \, d\theta$

22. $\int_0^{\pi/2} \sin^{7/2}\theta \cos^{5/2}\theta \, d\theta$

23. सिद्ध करो कि $\beta(m, n+1) = \frac{n}{m+n}\beta(m, n)$

24. $\int_{-1}^{1} (1+x)^{n-1} (1-x)^{m-1} \, dx$ का मान ज्ञात करो। {संकेत : $x = \cos 2\theta$ मान लो}

25. $\int_{-1}^{1} (1-x)^5 (1+x)^6 \, dx$ का मान ज्ञात करो।

26. $\int_0^1 x^p (1-x^q)^y \, dx$ को β के फलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

संकेत : $x^q = t, x = t^{1/q}, dx = \frac{1}{q} t^{(1/q)-1} dt$ रखकर हल करो।

27. सिद्ध करो कि $\Gamma\left(\frac{(n+1)}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{(n+2)}{2}\right) = \frac{\pi\,\Gamma(n+1)}{2^n}$

28. दिखाओ कि $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\times\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$

संकेत : $x^n = t, \; x = t^{1/n}, \; dx = \frac{1}{n}\cdot t^{1/n - 1} dt$ रखकर हल करो।

29. दिखाओ कि $\int_0^1 \tan^n x \, dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}$, जब $-1 < n < 1$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

संकेत : $I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^{-n} x \, dx = \frac{\Gamma\frac{n+1}{2}\Gamma\frac{-n+1}{2}}{2\Gamma\frac{n-n+2}{2}} = \frac{1}{2}\Gamma(N)\,\Gamma(1-N)$ (जहाँ $N = \frac{n+1}{2}$)

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin N\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}8$$

उत्तरमाला 17

2. $\frac{1}{1260}$ 3. $\frac{\Gamma(1/3)\,\Gamma(1/2)}{3\,\Gamma(5/6)}$ 4. $2\sqrt{3}\,\pi$ 5. $\frac{1}{1848}$ 6. $\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)$

7. $\frac{105\sqrt{\pi}}{2048}$ 10. 5040; $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$; $-2\sqrt{\pi}$; $\frac{16\sqrt{\pi}}{105}$; $\frac{-32\sqrt{\pi}}{945}$ 12. $\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$

17. $4\pi^{7/2}$ 18. $\frac{2^{12}\pi^{12}}{5}$ 19. $\frac{5\pi}{4096}$ 20. $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$

21. $\frac{5\pi}{32}$ 22. $\frac{1}{12}\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ 24. $2^{p+q-1}\cdot\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

25. $\frac{512}{693}$ 26. $\frac{1}{q}\beta\left(\frac{p+1}{q}, y+1\right)$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

18 फोरियर रूपान्तर तथा फोरियर श्रेणी

(Fourier Transforms and Fourier Series)

1. परिचय (Introduction) :

लाप्लास रूपान्तरों की भाँति फोरियर रूपान्तर भी बहुत उपयोगी हैं और इनका प्रयोग अवकल समीकरणों को हल करने में किया जाता है। ये रूपान्तर केवल ऐसे फलनों के लिए किये जा सकते हैं जो किसी दिये हुये अन्तराल (a, b) में,

(i) परिभाषित हैं तथा (a, b) अन्तराल के कतिपय बिन्दुओं को छोड़कर अन्य सभी बिन्दुओं पर एक मानी फलन हैं (Functions which are defined and single-valued in the interval (a, b) except a few points in the interval) ।

(ii) $f(x)$ तथा $f'(x)$ अन्तराल (a, b) में Piece-wise continuous हैं।

हम इस अध्याय में ऐसे ही फलनों को लेंगे जो उपरोक्त दोनों शर्तों को जिन्हें डिरिचलेट की शर्तें (Dirichlet's conditions) कहते हैं, को पूरा करते हैं।

2. $f(x)$ का अपरिमित फोरियर रूपान्तर [Infinite Fourier Transform of $f(x)$] :

फलन $f(x)$ के अन्तराल $(-\infty, \infty)$ में फोरियर रूपान्तर को $f(p)$ या $F\{f(x)\}$ से प्रदर्शित करते हैं और ये फोरियर रूपान्तर निम्न प्रकार से परिभाषित हैं :

$$f(p) = F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(x)\, dx$$

3. $f(p)$ का अपरिमित प्रतिलोम फोरियर रूपान्तर [Inverse of Infinite Fourier Transform of $f(p)$] :

फलन $f(x)$ का फोरियर रूपान्तर $f(p)$ है तो $f(p)$ का प्रतिलोम फोरियर रूपान्तर $f(x)$ होगा जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है—

$$f(x) = F^{-1}\{f(p)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(p)\, dp$$

4. अपरिमित फोरियर ज्या रूपान्तर (Infinite Fourier Sine Transform) :

फलन $f(x)$ के फोरियर ज्या रूपान्तर को $f_s(p)$ या $F_s\{f(x)\}$ से प्रदर्शित करते हैं। यह अन्तराल $(0, \infty)$ में निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$f_s(p) = F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin px\, dx$$

5. अपरिमित फोरियर ज्या रूपान्तर का प्रतिलोम (Inverse of Infinite Fourier Sine Transform) :

फलन $f(x)$ के फोरियर ज्या रूपान्तर $f_s(p)$ का प्रतिलोम, अन्तराल $(0, \infty)$ में निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है—

$$f(x) = F_s^{-1}\{f_s(p)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(p) \sin px\, dx$$

6. अपरिमित फोरियर कोज्या रूपान्तर (Infinite Cosine Transform) :

फलन $f(x)$ के फोरियर कोज्या रूपान्तर को $f_c(p)$ या $F_c\{f(x)\}$ से प्रदर्शित करते हैं और यह अन्तराल $(0, \infty)$ में निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$f_c(p) = F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos px\, dx$$

7. अपरिमित फोरियर कोज्या रूपान्तर का प्रतिलोम (Inverse of Fourier Cosine Transform) :

फलन $f(x)$ के फोरियर कोज्या रूपान्तर $f_c(p)$ का प्रतिलोम, अन्तराल $(0, \infty)$ में निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है—

$$f(x) = F_c^{-1}\{f_c(p)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(p) \cos px\, dx$$

8. परिमित फोरियर रूपान्तर (Finite Fourier Transform)

परिमित फोरियर रूपान्तर निम्न प्रकार से परिभाषित है—

(1) **$f(x)$ का परिमित फोरियर ज्या रूपान्तर (Finite Fourier Sine Transform)**—फलन $f(x)$ का परिमित फोरियर ज्या रूपान्तर $f_s(p)$ या $F_s\{f(x)\}$, अन्तराल $0 < x < a$ में निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$f_s(p) = F_s\{f(x)\} = \int_0^a f(x) \frac{\sin(p\pi x)}{a}\, dx$$

(2) **परिमित फोरियर ज्या रूपान्तर का प्रतिलोम (Inverse of Finite Fourier Sine Transform)**—फलन $f(x)$ के परिमित फोरियर रूपान्तर $f_s(p)$ का प्रतिलोम, अन्तराल $0 < x < a$ में निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$f(x) = F_s^{-1}\{f_s(p)\} = \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} f_s(p) \cdot \sin \frac{p\pi x}{a}$$

(3) **परिमित फोरियर कोज्या रूपान्तर (Finite Fourier Cosine Transform)**—फलन $f(x)$ के परिमित फोरियर कोज्या रूपान्तर $f_c(p)$ या $F_c\{f(x)\}$, अन्तराल $0 < x < a$ में निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$f_c(p) = F_c\{f(x)\} = \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx$$

(4) **परिमित फोरियर कोज्या रूपान्तर का प्रतिलोम (Inverse of Finite Fourier Cosine Transform)**—फलन $f(x)$ के परिमित फोरियर कोज्या रूपान्तर $f_c(p)$ का प्रतिलोम, अन्तराल $0 < x < a$ में निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$f(x) = F_c^{-1}\{f(x)\} = \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} f_c(p) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) + \frac{1}{a} f_c(0)$$

9. फोरियर रूपान्तरण के कुछ मुख्य गुण (Some Important Properties of Fourier Transform) :

1. **रैखिक गुण (Linear Property) :** $F\{C_1 f_1(x) \pm C_2 f_2(x)\} = C_1 F\{f_1(x)\} \pm C_2 F\{f_2(x)\}$

2. **पैमाना परिवर्तन गुण (Change of Scale Property) :**

(i) यदि $f(x)$ का फोरियर रूपान्तर $f(p)$ है तो $f(ax)$ का फोरियर रूपान्तरण $\frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{p}{a}\right)$ होगा अर्थात्

$$F\{f(ax)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{p}{a}\right)$$

(ii) यदि $f(x)$ का फोरियर ज्या रूपान्तर $f_s(p)$ है तो $f(ax)$ का फोरियर ज्या रूपान्तर $\frac{1}{a} \cdot f_s\left(\frac{p}{a}\right)$ होगा अर्थात्

$$F_s\{f(ax)\} = \frac{1}{a} \cdot f_s\left(\frac{p}{a}\right)$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(iii) यदि $f(x)$ का फोरियर ज्या रूपान्तर $f_c(p)$ है तो $f(ax)$ का फोरियर ज्या रूपान्तर $\frac{1}{a}\cdot f_c\left(\frac{p}{a}\right)$ होगा अर्थात्

$$F_c\{f(ax)\} = \frac{1}{a}\cdot f_c\left(\frac{p}{a}\right)$$

3. स्थानान्तरी गुण (Shifting Property) :

यदि $f(x)$ का फोरियर रूपान्तर $f(p)$ है तो $f(x-a)$ का फोरियर रूपान्तर $e^{-iap} f(p)$ होगा।

$$F\{f(x-a)\} = e^{-iap}\cdot f(p)$$

4. मॉडुलेशन प्रमेय (Modulation Theorem) :

यदि $f(x)$ का फोरियर रूपान्तर $f(p)$ है तो $f(x)\cos ax$ का फोरियर रूपान्तर $\frac{1}{2}f(p-a) + \frac{1}{2}f(p+a)$ होगा।

$$F\{f(x)\cos ax\} = \frac{1}{2}f(p-a) + \frac{1}{2}f(p+a) \qquad \text{(सूत्र)}$$

5. अवकलन प्रमेय (Derivative Theorem) :

यदि $f(x)$ का फोरियर रूपान्तर $f(p)$ है तो $f(x)$ के अवकल गुणांक $f'(x)$ का फोरियर रूपान्तर $ip\cdot f(p)$ होगा।

$$F\{f'(x)\} = ip\cdot f(p) \qquad \text{(सूत्र)}$$

n वें अवकल गुणांक के लिए,

$$F\left\{\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right\} = (ip)^n\cdot f(p) \qquad \text{(सूत्र)}$$

6. संचलन प्रमेय (Convolution Theorem) :

यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ के फोरियर रूपान्तर क्रमशः $f(p)$ तथा $g(p)$ हैं तो $f(x)$ तथा $g(x)$ के संचलन का फोरियर रूपान्तर उनके फोरियर रूपान्तरों के गुणनफल के बराबर होता है।

$$F\{f(x) * g(x)\} = F\{f(x)\}\cdot F\{g(x)\} = f(p)\cdot g(p)$$

सारांश (Summary) : **याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)**

विद्यार्थी निम्नलिखित समाकलों (Integrals) को कण्ठस्थ कर लें। सूत्रों की भाँति इनका प्रयोग किया जा सकता है—

1. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}, a > 0$
2. $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$
3. $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$
4. $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot x^{n-1} dx = \Gamma(n) = (n-1)!$
5. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. निम्न फलन का फोरियर रूपान्तर ज्ञात करो—

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)

हल :
$$f(p) = F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\cdot f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{ipx}\cdot 1\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left|\frac{e^{ipx}}{ip}\right|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot ip}(e^{ipa} - e^{-ipa}) = \frac{2i\sin pa}{\sqrt{2\pi}\cdot ip} = \frac{2\sin pa}{p\cdot\sqrt{2\pi}}, p \neq 0 \qquad \left(\because \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin x\right)$$

यदि $p \to 0, f(p) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\left(\because \lim_{p\to 0}\frac{\sin pa}{pa} = 1\right)$ **उत्तर**

उदाहरण 2. $f(x)$ का फोरियर रूपान्तर ज्ञात करो, यदि

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

हल :
$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{ipx}\cdot x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|x^2\cdot\frac{e^{ipx}}{ip} - \int 2x\cdot\frac{e^{ipx}}{ip}dx\right|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{x^2\cdot e^{ipx}}{ip} - \frac{2}{ip}\left(x\cdot\frac{e^{ipx}}{ip} - \int\frac{1\cdot e^{ipx}}{ip}dx\right)\right|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{x^2\cdot e^{ipx}}{ip} - \frac{2x\cdot e^{ipx}}{i^2p^2} + \frac{2}{i^2p^2}\cdot\frac{e^{ipx}}{ip}\right|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{a^2}{ip}\cdot(e^{ipa} - e^{-ipa}) + \frac{2a}{p^2}(e^{ipa} + e^{-ipa}) - \frac{2}{ip^3}(e^{ipa} - e^{-ipa})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot p^3}\left[\frac{a^2p^2}{ip}\cdot 2i\sin pa + 2ap\cdot 2\cos pa - \frac{2}{i}\cdot 2i\sin pa\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{p^3}\left[(a^2p^2-2)\sin pa + 2ap\cos pa\right]}$$ **उत्तर**

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 3. निम्न फलन का ज्या फोरियर रूपान्तर ज्ञात कीजिये—

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \ 1 < x < 2 \\ 0 & , \ x > 2 \end{cases}$$

हल : $f_s(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^\infty f(x) \sin px \, dx$ (सूत्र)

अब $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \sin px \, dx = \int_0^1 f(x) \sin px \, dx + \int_1^2 f(x) \sin px \, dx + \int_2^\infty f(x) \sin px \, dx$

$$= \int_0^1 x \sin px \, dx + \int_1^2 (2 - x) \sin px \, dx + \int_2^\infty 0 \sin px \, dx$$

$$= \left| -x \cdot \frac{\cos px}{p} + \int \frac{1 \cdot \cos px}{p} dx \right|_0^1 + \left| (2 - x) \cdot \frac{-\cos px}{p} - \int \frac{-1 \cdot (-\cos px)}{p} dx \right|_1^2$$

$$= \left| \frac{-x \cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2} \right|_0^1 + \left| \frac{(2 - x) \cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2} \right|_1^2$$

$$= \left(\frac{-\cos p}{p} + \frac{\sin p}{p^2} - 0 \right) - \left(\frac{0 - \cos p}{p} + \frac{\sin 2p - \sin p}{p^2} \right)$$

$$= \frac{-\cos p}{p} + \frac{\sin p}{p^2} + \frac{\cos p}{p} - \frac{\sin 2p}{p^2} + \frac{\sin p}{p^2} = \frac{2 \sin p - \sin 2p}{p^2} = \frac{2 \sin p}{p^2} (1 - \cos p)$$

$$\therefore \quad f_s(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2 \sin p}{p^2} \cdot (1 - \cos p)$$ उत्तर

उदाहरण 4. फलन e^{-x} के फोरियर ज्या तथा कोज्या रूपान्तर ज्ञात कीजिये—

हल : (i) e^{-x} का फोरियर ज्या रूपान्तर—

$$f_s(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin px \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \sin px \, dx$$

दो बार खण्डशः समाकलन करने पर,

$$f_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{-e^{-x} (\sin px + p \cos px)}{1 + p^2} \right|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{p}{(1 + p^2)} \right)}$$ उत्तर

(ii) e^{-x} का फोरियर कोज्या रूपान्तर—

$$f_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos px \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos px \, dx$$

दो बार खण्डशः समाकलन करने पर,

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{e^{-x} (-\cos px + p \sin px)}{1 + p^2} \right|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{(1 + p^2)} \right)$$ उत्तर

उदाहरण 5. निम्न फलन का फोरियर ज्या रूपान्तर ज्ञात कीजिये—

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \ 0 < x < a \\ 0 & , \ x > a \end{cases}$$

हल : $f_s(p) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty f(x) \sin px \, dx$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin x \cdot \sin px \, dx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty 0 \cdot \sin px \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^a 2 \sin x \sin px \, dx + 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a [\cos (1 - p) x - \cos (1 + p) x] \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\sin (1 - p) x}{1 - p} - \frac{\sin (1 + p) x}{1 + p} \right|_0^a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin (1 - p) a}{1 - p} - \frac{\sin (1 + p) \cdot a}{1 + p} \right]$$ उत्तर

उदाहरण 6. फलन $\dfrac{e^{-ax}}{x}$ का फोरियर ज्या रूपान्तर ज्ञात करो । **(उ० प्र० डिप्लोमा 2003)**

हल : $f_s(p) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty f(x) \sin px \, dx$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \cdot \sin px \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot I \quad \text{जहाँ } I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \sin px \, dx \quad ...(1)$$

p के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dI}{dp} = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \cdot \cos px \cdot x \, dx = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot \cos px \, dx = \frac{a}{a^2 + p^2}$$

p के सापेक्ष समाकलित करने पर,

$$\int \frac{dI}{dp} \cdot dp = \int \frac{a}{a^2 + p^2} dp \quad \text{या} \quad \int dI = a \int \frac{1}{a^2 + p^2} dp$$

या $\quad I = a \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \tan^{-1} \left(\dfrac{p}{a} \right) + c = \tan^{-1} \left(\dfrac{p}{a} \right) + c$

लेकिन, जब $p = 0$, $I = 0 \therefore 0 = \tan^{-1} 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow I = \tan^{-1} \left(\dfrac{p}{a} \right)$

I का यह मान समी० (1) में रखने पर, $\quad f_s(p) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \tan^{-1} \left(\dfrac{p}{a} \right)$ उत्तर

www.polytechnicknabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 7. फलन $f(x) = 4x$ का $0 < x < 8$ में परिमित फोरियर ज्या रूपान्तर ज्ञात करो।

हल: $f_s(p) = F_S\{f(x)\} = \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx$

$$= \int_0^8 4x \cdot \sin\frac{p\pi x}{8} dx = 4\left|x \cdot \frac{-\cos(p\pi x/8)}{(p\pi/8)}\right|_0^8 - 4\int_0^8 1 \cdot \frac{-\cos(p\pi x/8)}{(p\pi/8)} dx$$

$$= \frac{32}{p\pi}(-8\cos p\pi - 0) + \frac{4 \times 8}{p\pi} \cdot \left|\frac{\sin(p\pi x/8)}{(p\pi/8)}\right|_0^8$$

$$= \frac{-256\cos p\pi}{-p\pi} + \frac{32 \times 8}{p^2\pi^2} \cdot (\sin p\pi - 0)$$

$$= \frac{-256\cos p\pi}{p\pi} + \frac{256}{p^2\pi^2} \times (0 - 0) \quad (\because p \text{ पूर्णांक है } \therefore \sin p\pi = 0)$$

$$= \frac{-256\cos p\pi}{p\pi}$$

उत्तर

उदाहरण 8. यदि फलन $f(x)$ के फोरियर ज्या रूपांतर का प्रतिलोम $f_s(p) = \frac{e^{-ap}}{p}$ है तो $f(x)$ ज्ञात करो।

हल: $f(x) = F^{-1}\{f_s(p)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(p) \cdot \sin px\, dp$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ap}}{p} \cdot \sin px\, dp$$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ap}}{p} \cdot (\cos px \times p)\, dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-ap} \cos px\, dp$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \left(\frac{a}{a^2 + x^2}\right)$$

समाकलित करने पर, $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

जब $x = 0$ तब $f(x) = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \tan^{-1}(0) + C \Rightarrow C = 0$

$$\therefore \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

उत्तर

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि $f(x/k)$ का फोरियर कोज्या रूपान्तर $kf_c(kp)$ है।

हल: $f_c(p) = F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos px\, dx$

$f(x)$ के स्थान पर $f(x/k)$ लेने पर, $F_c\{f(x/k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x/k) \cos px\, dx$

अब माना कि $\frac{x}{k} = y$, तब $dx = k\,dy$

$$\therefore F_c\left\{f\left(\frac{x}{k}\right)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \cos(pky) \cdot k\,dy = k\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \cos(pky)\, dy$$

$$= k\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos pkx\, dx = k \cdot f_c(pk)$$

सिद्धम्

अध्यासमाला 18 (1)

निम्न फलनों के फोरियर रूपान्तर ज्ञात करो—

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x & , \ |x| \le a \\ 0 & , \ |x| > a \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \ |x| \le 1 \\ 0 & , \ |x| > 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} e^{iap} & , \ a < x < b \\ 0 & , \ x < a, x > b \end{cases}$

5. $f(x)$ का फोरियर कोज्या रूपान्तर ज्ञात करो, यदि

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \ 0 < x < a \\ 0 & , \ x < a \end{cases}$$

6. निम्न फलन का फोरियर जया रूपान्तर ज्ञात कीजिये—

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & , \ 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \ 1 < x < 2 \\ 0 & , \ x > 2 \end{cases}$$

7. $f(x)$ का फोरियर ज्या रूपान्तर ज्ञात करो, यदि

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 < x < a \\ x & , \ a \le x \le b \\ 0 & , \ x > b \end{cases}$$

8. फलन $f(x) = \frac{1}{x}$ का फोरियर ज्या रूपान्तर ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)

9. फलन e^{-4x} का फोरियर ज्या तथा कोजया रूपान्तर ज्ञात करो।

10. फलन $\frac{e^{-ax}}{x}$ का फोरियर कोज्या रूपान्तर ज्ञात करो।

11. यह फलन ज्ञात करो जिस का फोरियर रूपान्तर $\frac{\sin ap}{p}$ है।

12. फलन $f(x) = 5x$ का $0 < x < 4$ में परिमित फोरियर ज्या तथा कोज्या रूपान्तर ज्ञात करो।

13. फलन $f(x) = e^{ax}$ का $0 < x < a$ के अन्तराल में परिमित फोरियर ज्या रूपान्तर ज्ञात करो।

14. उस फलन का फोरियर कोज्या रूपान्तर ज्ञात करो जो $0 < x < a$ के लिए इकाई है और $x \ge a$ के लिए शून्य है।

15. सिद्ध करो कि फलन $f(x) = e^{-x^2/2}$ का फोरियर रूपान्तर $\frac{-s^2}{2}$ है।

16. यदि $f(x)$ का फोरियर ज्या रूपान्तर $f_s(p)$ है तो सिद्ध करो कि $f(x/k)$ का फोरियर ज्या रूपान्तर $kf_s(p)$ है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उत्तरमाला 18 (1)

1. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\sin p}{p}$

2. $\frac{2i}{p^2\sqrt{2\pi}} \cdot (\sin ap - ap\cos ap)$

3. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\frac{\sin p - p\cos p}{p^3}\right]$

4. $\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i(p+a)a} - e^{i(p+a)b}}{p+a}\right]$

5. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(1+p)a}{1+p} + \frac{\sin(1-p)a}{1-p}\right]$

6. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{2}{p} + \frac{\sin p - 2\cos p}{p} + \frac{\sin p - \sin 2p}{p^2}\right]$

7. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{p}(a\cos pa - b\cos pb) + \frac{1}{p^2}(\sin pb - \sin pa)\right]$

8. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

9. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{p}{16+p^2}\right); \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{4}{16+p^2}\right)$

10. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \log\left[\frac{a^2}{a^2+p^2}\right]$

11. $f(x) = \begin{cases} 1 & , \; x < a \\ 0 & , \; x > a \end{cases}$

12. $\frac{-80\cos p\pi}{p\pi} \cdot \frac{80}{p^2\pi^2}(\cos p\pi - 1)$

13. $\frac{p}{a^2+p^2}[1 - (-1)^p e^{a\pi}]$

14. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \cos pa$

फोरियर श्रेणी (FOURIER SERIES)

10. आवर्ती फलन (Periodic Functions) :

यदि फलन $y = f(x)$ में कोटि y का मान, भुज x के समान अन्तरालों पर दोहराया जाता है अर्थात् यदि

$$f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = ... = f(x)$$

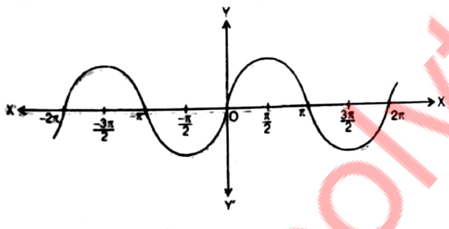
जहां T कोई धनात्मक संख्या है, तब फलन $f(x)$ को आवर्ती फलन (periodic function) कहते हैं तथा T को फलन का मूल आवर्त (fundamental period) कहते हैं।

$\because \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+6\pi) = ... = \sin x$

$\therefore \sin x$ आवर्ती फलन है और उसका आवर्त 2π है।

इसे साइनोसॉइडल आवर्ती फलन (sinusoidal periodic function) भी कहते हैं।

$\sin x, \cos x, \sec x, \text{cosec}\, x, \tan x, \cot x$ सभी आवर्ती फलन हैं। इन में पहले चार फलनों का आवर्त 2π है तथा अन्तिम दो फलनों का आवर्त π है। $\sin x$ का ग्राफ नीचे चित्र में दिखाया है।



याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

11. आवर्ती फलन (Periodic Functions) :

(i) यदि $f(x)$ का आवर्त T है तो $f(ax \pm b)$ का आवर्त $\frac{T}{a}$ होता है। इस प्रकार $\sin nx, \cos nx$ के आवर्त $\frac{2\pi}{n}$ हैं तथा $\tan nx, \cot nx$ के आवर्त $\frac{\pi}{n}$ हैं।

(ii) यदि $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ आवर्ती फलन हैं और उनके आवर्त क्रमशः T_1, T_2, T_3 हैं तब आवर्त फलन,

$F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f(x)$ का आवर्त T_1, T_2, T_3 के ल० स० प० (L.C.M.) के बराबर होता है।

उदाहरणतः $F(x) = 3\sin 4x + 2\cos 3x$ आवर्त फलन है। $\sin 4x$ का आवर्त $\frac{2\pi}{4}$ अर्थात् $\frac{\pi}{2}$ है तथा $\cos 3x$ का आवर्त $\frac{2\pi}{3}$ है और $F(x)$ का आवर्त $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ का ल० स० प० 2π है।

फोरियर श्रेणी (Fourier Series) :

त्रिकोणमितीय श्रेणी, $\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + ... + a_n\cos nx + ...$
$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + ... + b_n\sin nx + ...$

जिसे हम निम्न प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं—

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad ...(1)$$

को फोरियर श्रेणी कहते हैं। गुणकों a_0, a_n, b_n को फोरियर गुणांक (Fourier Coefficients) या फोरियर नियतांक (Fourier Constants) कहते हैं इनके मान निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात किये जाते हैं।

(i) अन्तराल $0 \le x \le 2\pi$ अर्थात् $[0, 2\pi]$ में

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \,;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \,;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

(ii) अंतराल $-\pi \le x \le \pi$ अर्थात् $[-\pi, \pi]$ में

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \,;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

(iii) यदि $f(x)$ सम फलन (even function) है, तब

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \,;\; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \,;\; b_n = 0$$

(iv) यदि $f(x)$ विषम फलन (odd function) है, तब

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

नोट : 1. फोरियर श्रेणी (1) में, $\sum a_n \cos nx$ सम फलन है तथा $\sum b_n \sin nx$ विषम फलन है।

2. खण्डशः समाकलन का व्यापक नियम $\int u \cdot v\,dx = u \cdot v_1 - u' \cdot v_2 + u'' \cdot v_3 - u''' \cdot v_4 + ...$

जहाँ $u' = \frac{du}{dx}; u'' = \frac{d^2u}{dx^2}; u''' = \frac{d^3u}{dx^3} \quad v_1 = \int v\,dx; \; v_2 = \int v_1\,dx; \; v_3 = \int v_2\,dx$ इत्यादि

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरणार्थ $$\int x^2 \cos 5x\, dx = x^2 \cdot \left(\frac{\sin 5x}{5}\right) - 2x \cdot \left(\frac{-\cos 5x}{5^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin 5x}{5^3}\right)$$

$$= \frac{1}{5}x^2 \sin 5x + \frac{2}{25} x \cos 5x - \frac{2}{125} \sin 5x$$

12. डिरिचलेट के प्रतिबन्ध (Dirichlet 's Conditions) :

फोरियर श्रेणी, $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ तभी सत्य है यदि $f(x)$ डिरिचेल्ट के निम्नलिखित प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है—

1. $f(x)$ एक आवर्ती (periodic) फलन है ।
2. $f(x)$ तथा इस के समाकल (integrals) परिमित तथा एक-मानी (single- valued and finite) फलन हैं ।
3. $f(x)$, परिबद्ध (bounded) फलन है तथा परिमित संख्या में अंसतत बिन्दु (discontinuous points) रखता है ।
4. $f(x)$, परिमित संख्या में उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान (maximum and minimum values) रखता हो ।

13. कुछ महत्त्वपूर्ण समाकल (Some Important Integrals) :

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. $\int_0^{2\pi} \sin nx\, dx = 0$
2. $\int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = 0$
3. $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$
4. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \pi$
5. $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\, dx = 0$
6. $\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0$
7. $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0,$ जहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$
8. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$
9. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 10. फलन $f(x) = x$ की $[0, 2\pi]$ अन्तराल में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए ।

हल : $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \ldots(1)$$

(i) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi \quad [\because f(x) = x]$$

(ii) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left|x \times \frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{\sin nx}{n}\, dx\right]$$

$$= 0 - \frac{1}{n\pi} \times \left|\frac{-\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(1 - 1) = 0$$

(iii) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|x \times \frac{-\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(1 \cdot \frac{-\cos nx}{n}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} + 0\right) + \frac{1}{n\pi} \times \left|\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{2}{n} + \frac{1}{n\pi}(0 - 0) = \frac{-2}{n}$$

(1) में ये मान रखने पर, $$x = \frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0 + \frac{-2}{n}\sin nx\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \pi - 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x + \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \quad x = \pi - 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots\ldots\right]$$ उत्तर

उदाहरण 11. फलन $f(x) = x^2, [-\pi, \pi]$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए जब $f(x + 2\pi) = f(x)$ । उससे निग्मन कीजिए कि
$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots\ldots$$

हल : माना कि $f(x)$ की अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में फोरियर श्रेणी निम्न है ।

$$f(x) = x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \ldots(1)$$

(i) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

(ii) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx \quad [\because f(x) \text{ सम फलन है}]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n} - 2x \cdot \frac{-\cos nx}{n^2} + 2 \cdot \frac{-\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}$$ (खण्डश: समाकल के व्यापक नियम से)

$$= \frac{2}{\pi}\left[(0 - 0) + \left(\frac{2\pi \times (-1)^n}{n^2} - 0\right) - (0 - 0)\right] \quad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$= \frac{4 \times (-1)^n}{n^2} = -\frac{4}{n^2} \text{ यदि } n \text{ विषम है तथा } \frac{4}{n^2} \text{ यदि } n \text{ सम है।}$$

(iii) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

$= 0$ $\quad$ ($\because$ फलन विषम है।)

ये मान (1) में रखने पर $\quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4 \times (-1)^n}{n^2}\cos nx + 0\right]$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \ldots\right] \quad \ldots(2) \text{ उत्तर}$$

समी० (2) में $x = 0$, रखने पर $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\ldots\right]$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots$$

उदाहरण 12. निम्नलिखित फलन की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & ; \; -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & ; \; 0 < x < \pi \end{cases}$$

हल : मानो कि $f(x)$ की फोरियर श्रेणी,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ है।} \quad \ldots(1)$$

(i) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left|\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2}\right|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right] + \frac{1}{\pi}\left|\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right| = 0$$

(ii) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{1 \cdot \sin nx}{n}dx$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left|\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{-1\sin nx}{n}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(0 - 0) + \frac{1}{n\pi}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}(0 - 0) + \frac{1}{n\pi}\left|\frac{-\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{4}{n^2\pi} \text{ when } n \text{ is odd, 0 when } n \text{ is even.}$$

(iii) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left|\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{-\cos nx}{n}dx$$

$$-\frac{1}{\pi}\left|\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{-1 \cdot \cos nx\,dx}{n}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos n\pi\right) + \frac{1}{n\pi}\cdot\left|\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\cos n\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\cdot\left|\frac{\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos n\pi\right) + 0 + \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cos n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 0 = 0$$

समी० (1) में ये मान रखने पर, $f(x)$ की फोरियर श्रेणी,

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi n^2}\cos nx + 0\right), \quad (n \text{ विषम लेने पर})$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right] \quad \text{उत्तर}$$

14. सम तथा विषम फलन (Even and Odd Functions) :

1. समफलन (Even Functions)—यदि $f(-x) = f(x)$, तब फलन $f(x)$ समफलन या सममित फलन (symmetrical function) कहलाता है। जैसे $x^4 + x^2 + 1, 2\cos x + 3, e^x + e^{-x}$ आदि सम फलन हैं।

समफलनों के ग्राफ y-अक्ष के सापेक्ष सममित होते हैं अर्थात् y-अक्ष के दोनों ओर (बायीं तथा दायीं तरफ) ग्राफ एक जैसा होता है। y-अक्ष एक दर्पण (mirror) का काम करता है।

यदि $f(x)$, अंतराल $[-\pi, \pi]$ में सम फलन है तो फोरियर श्रेणी, कोज्या श्रेणी (cosine series) होती है और इस प्रकार के फलन के ग्राफ का क्षेत्रफल, 0 से π के बीच के ग्राफ का दुगुना होता है अर्थात् $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$

2. विषम फलन (Odd Functions)—यदि $f(-x) = -f(x)$ तब फलन $f(x)$ विषम फलन या विषम सममित (skew symmetric) कहलाता है। जैसे $2x^3 + 3x$, $4\sin^3 x + 5\sin x$, $2x + 4\tan x$ आदि विषम फलन हैं।

इस प्रकार के फलनों का ग्राफ मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित होता है अर्थात् विपरीत चतुर्थांशों (opposite quadrants) में सममित होता है। यदि फलन $f(x)$, अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में विषम फलन है तो उसकी फोरियर श्रेणी ज्या श्रेणी (sine series) होती है और इस प्रकार के फलनों के ग्राफ का क्षेत्रफल शून्य होता है, अर्थात् $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

15. सम और विषम फलनों की फोरियर श्रेणियाँ (Fourier Series of Even and Odd Functions) :

1. सम फलन की फोरियर श्रेणी, $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

जहाँ $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$; $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$; $b_n = 0$

2. विषम फलन की फोरियर श्रेणी $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, जहाँ $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

उदाहरण 13. फलन $f(x) = x^3$ की अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात करो।

हल : $f(x) = x^3$ एक विषम फलन है इसलिए माना कि इसकी फोरियर श्रेणी, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ है। ...(1)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\,dx$$

खण्डशः समाकलन के व्यापक नियम से

$$= \frac{2}{\pi}\left| x^3\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - 3x^2\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right) + 6x\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right) - 6\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)\right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi^3\cos n\pi}{n} - 0 + \frac{6\pi\cos n\pi}{n^3} + 0\right) = 2\cos n\pi\left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3}\right)$$

$$= 2\times(-1)^n\left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right) \quad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

ये मान संमीकरण (1) में रखने पर,

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2\cdot\left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right) \quad \text{जहाँ } n = 1, 3, 5, \ldots$$ उत्तर

अभ्यासमाला 18 (2)

1. फलन $f(x) = x + x^2$ की अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)
2. फलन $f(x) = x\sin x$ की अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)
3. फलन $f(x) = x\cos x$ की अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)
4. निम्नलिखित फलन की फोरियर श्रेणी ज्ञात करो—

$$f(x)\begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

5. यदि $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi\end{cases}$

तब $f(x)$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात करो और उससे दिखाओ कि

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)

6. फलन $f(x)$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात करो जब

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

7. फलन $f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करो यदि

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi\end{cases}$$

तब दिखाओ कि $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2005)

8. फलन $f(x)$ का अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में x के गुणांकों की ज्या एवं कोज्या श्रेणी ज्ञात करो जहाँ,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^x, & 0 < x < \pi\end{cases}$$

9. फलन $f(x) = |x|$ के लिए $(-\pi, \pi)$ अन्तराल में फोरियर श्रेणी ज्ञात करो।
10. फलन $f(x) = x$ को अन्तराल $(0, \pi)$ में ज्या श्रेणी में व्यक्त कीजिए।
11. फलन $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$, की $0 \le x \le 2\pi$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करो। उससे श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2 - 1}$ का योग ज्ञात करो।
12. फलन $f(x) = x + 1, 0 < x < \pi$ के लिए फोरियर कोज्या श्रेणी ज्ञात कीजिए।
13. x^2 के लिए अन्तराल $(-l, l)$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)
14. फलन $f(x) = x^2$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करो। उससे श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ प्राप्त करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)
15. फलन $f(x) = x, 0 < x < 2$ के लिए अर्धपरास ज्या श्रेणी ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

उत्तरमाला 18 (2)

1. $x + x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots + 2\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \ldots\right]$
2. $x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2 - 1)}\cos nx$
3. $x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{n^2 - 1}\sin nx$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4. $f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \ .....\right]$

5. $f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + ...\right] + \frac{3}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{3}\sin x + ...$

6. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...\right] + \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + ...\right]$

7. $f(x) = \frac{4k}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right]$

8. $f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} - \frac{e^{\pi} + 1}{2\pi}(\cos x - \sin x) + \frac{e^{\pi} - 1}{5\pi}(\cos 2x - 2\sin 2x) - \frac{e^{\pi} + 1}{15\pi}(\cos 3x - 3\sin 3x)$

9. $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} - .....\right]$

10. $2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + ...\right]$

11. $\sqrt{1 - \cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2 - 1} \ ; \ \frac{1}{2}$

12. $\frac{\pi}{2} + 1 - 4\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...\right)$

13. $x^2 = \frac{l^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left[l^2 - \frac{\sin nl}{n} + \frac{2l\cos nl}{n^2} - \frac{2nl}{n^3}\right]\cos nx$

14. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2}\right]$

15. $f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - ....\right]$

खण्ड-5

प्रायिकता एवं सांख्यिकी
(PROBABILITY AND STATISTICS)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

19 प्रायिकता (Probability)

1. **प्रायिकता (Probability) :**

परिभाषा—प्रायिकता को कई रूपों में परिभाषित किया गया है लेकिन नीचे दी गई परिभाषा अधिक उपयुक्त है।

"प्रायिकता या सम्भावना अनुकूल घटनाओं का, होने वाली समस्त घटनाओं के साथ अनुपात है।"

अतः यदि किसी घटना के घटने की परिस्थितियाँ m हैं तथा न घटने की परिस्थितियाँ n हैं, तब

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

घटना के घटने की प्रायिकता, $p = \dfrac{\text{अनुकूल परिस्थितियाँ}}{\text{कुल परिस्थितियाँ}} = \dfrac{m}{m+n}$ (सूत्र)

घटना के न घटने की प्रायिकता, $q = \dfrac{\text{प्रतिकूल परिस्थितियाँ}}{\text{कुल परिस्थितियाँ}} = \dfrac{n}{m+n}$ (सूत्र)

⇒ घटना घटने और घटना के न घटने की प्रायिकता का योग सदैव 1 होता है ⇒ $p + q = 1 \therefore q = 1 - p$

प्रायिकता ज्ञात करने की विधि—

सूत्र के आधार पर प्रायिकता ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियायें कीजिए—

(i) घटना से सम्बन्धित सभी (अनुकूल तथा प्रतिकूल) परिस्थितियों की संख्या ज्ञात कीजिये, जैसे-सिक्का उछालने में यह संख्या 2, पासा फेंकने में 6 तथा ताश की गड्डी में एक पत्ता खींचने की परिस्थितियाँ 52 हैं।

(ii) फिर घटना के घटित होने की अनुकूल परिस्थितियों की संख्या ज्ञात कीजिये, जैसे-सिक्का उछालने पर शीर्ष (Head) आने की अनुकूल परिस्थिति 1 है। ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता निकालने पर उसके बेगम होने की अनुकूल परिस्थितियाँ 4 हैं।

(iii) तब घटना की अनुकूल परिस्थितियों की संख्या को कुल परिस्थतियों की संख्या से भाग देकर घटना की प्रायिकता ज्ञात कर लीजिये।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. एक पासे की फेंक में सम अंक (even number) आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : ∵ पासा फेंकने पर 6 अंकों (1, 2, 3, 4, 5, 6) में से कोई भी एक अंक आ सकता है ∴ कुल परिस्थितियों की संख्या = 6

∵ सम अंक (2, 4, 6) तीन हैं ∴ अनुकूल परिस्थितियों की संख्या = पासे में सम अंकों की संख्या = 3

अभीष्ट प्रायिकता $(p) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ उत्तर

उदाहरण 2. ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचने पर उसके (i) बादशाह (ii) पान का पत्ता (iii) हुकम का पत्ता अथवा इक्का होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : ∵ 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचने पर कोई भी पत्ता आ सकता है, ∴ कुल परिस्थितियों की संख्या = 52

(i) पत्ते के बादशाह होने की परिस्थितियाँ= ताश की गड्डी में बादशाहों की संख्या = 4

∴ अनुकूल परिस्थितियाँ = 4 अभीष्ट प्रायिकता, $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(ii) $\because$ पान के 13 पत्ते हैं अतः खींचे हुए पत्ते के पान का पत्ता होने की परिस्थितियाँ 13 हैं

$\Rightarrow$ अनुकूल परिस्थितियाँ = 13   अभीष्ट प्रायिकता, $p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ उत्तर

(iii) 13 हुकम के पत्ते तथा 3 अन्य इक्के, कुल 16 पत्ते अनुकूल हैं

$\therefore$ अतः अनुकूल परिस्थितियाँ = 16 अभीष्ट प्रायिकता, $p = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$ उत्तर

उदाहरण 3. एक थैले में 5 लाल तथा 7 नीली गेंदें हैं। थैले में से एक गेंद निकालने पर उसके नीली होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : चूँकि कुल 12 गेंदें हैं। एक गेंदें निकालने पर वह कोई सी गेंद हो सकती है, अतः कुल परिस्थितियाँ = 12

अनुकूल परिस्थितियों की संख्या = नीली गेंदों की संख्या = 7

$\therefore$ अभीष्ट प्रायकिता $(p) = \frac{7}{12}$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि एक लीप (leap) वर्ष को याद्दच्छया (at random) चुना जाए तो इसमें 53 इतवार होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

(उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

हल : लीप (leap) वर्ष में 366 दिन होते हैं अर्थात् 52 सप्ताह और 2 दिन। अतः सभी दिन 52 बार आते हैं और 2 दिन शेष रह जाते हैं। ये 2 दिन निम्न क्रम से आ सकते हैं।

1. सोमवार तथा मंगलवार
2. मंगलवार तथा बुधवार
3. बुधवार तथा बृहस्पतिवार
4. बृहस्पतिवार तथा शुक्रवार
5. शुक्रवार तथा शनिवार
6. शनिवार तथा रविवार
7. रविवार तथा सोमवार

अतः 52 सप्ताह के पश्चात् आने वाले दो दिनों की कुल परिस्थितियाँ = 7

उनमें रविवार होने की अनुकूल परिस्थितियाँ = 2

$\therefore$ 53 रविवार होने की प्रायिकता, $p = \frac{2}{7}$ उत्तर

उदाहरण 5. एक थैले में 6 लाल तथा शेष काली गेंदें हैं। यदि याद्दच्छया एक गेंद निकालने पर इसके लाल होने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है, तो थैले में काली गेंदों की संख्या ज्ञात करो।

हल : माना कि काली गेंदों की संख्या $= x$, तब थैले में कुल गेंदों की संख्या $= 6 + x$, कुल परिस्थितियाँ $= 6 + x$

$\because$ थैले में 6 लाल गेंदें है $\therefore$ अनुकूल परिस्थितियाँ = 6 $\Rightarrow$ लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{6}{6+x}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{3} = \frac{6}{6+x}$ या $6 + x = 18 \Rightarrow x = 12$ उत्तर

2. घटनायें (Events) :

घटना का अर्थ उन सभी परिणामों का समुच्चय होता है जो किसी क्रिया को याद्दच्य (at random) प्रयोग करने पर घटित हो सकते हैं। जैसे—यदि किसी सिक्के को उछाला जाये तो वह या तो चित्त (Head) गिरेगा या पट (Tail)। अतः एक सिक्के की उछाल में घटित होने वाली घटनायें दो $\{H, T\}$ हैं। इसी प्रकार पासे की फेंक में घटना समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ होगा अतः घटित होने के परिणाम 6 होंगे।

घटनायें निम्न प्रकार की होती हैं—

(i) परस्पर अपवर्जी घटनायें (Mutually Exclusive Events)—दो या दो से अधिक घटनायें यदि ऐसी हों कि एक के घटने पर दूसरी नहीं घट सकती, तो वे घटनायें परस्पर अपवर्जी घटनायें कहलाती हैं। जैसे—यदि किसी सिक्के को उछाला जाये तो सिक्के के चित्त या पट का आना परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं क्योंकि सिक्के की उच्छाल में एक साथ चित्त या पट नहीं पड़ सकता। इस प्रकार पासे की फेंक में 6 अंकों में से किसी भी एक अंक का आना अपवर्जी घटना है।

(ii) आश्रित घटनायें (Dependent Events)—यदि दो घटनायें एक साथ इस प्रकार घटती हैं कि एक घटना के घटने के बाद जब दूसरी घटना घटती है और उसके घटने में पहली घटना का प्रभाव पड़ता है तब वे आश्रित घटनायें कहलाती हैं। उदाहरणतः ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने के बाद यदि उसे बिना लौटाये दूसरा पत्ता खींचा जाये तो ये दोनों घटनायें आश्रित घटनायें हैं क्योंकि दूसरा पत्ता क्या आयेगा इसकी सम्भावना पहले खींचे गये पत्ते पर निर्भर करती है।

(iii) स्वतन्त्र घटनायें (Independent Events)—ऐसी दो या दो से अधिक घटनायें, जिनमें से प्रत्येक घटना का घटित होना स्वतन्त्र है अर्थात् एक घटना के घटित होने पर पहली घटना के घटित होने का कोई प्रभाव नहीं पड़ता, स्वतन्त्र घटनायें कहलाती हैं। जैसे—कक्षा के एक छात्र का पास या फेल होना, कक्षा के दूसरे छात्र के पास या फेल होने पर निर्भर नहीं करता।

(iv) सर्वसमावेशी घटनायें (Exhaustive Events)—ऐसी घटनायें, जिनमें से कम से कम एक घटना का घटित होना जरूरी है, सर्वसमावेशी घटनायें कहलाती हैं। जैसे—पासे की फेंक में 6 अंकों में से कोई भी एक अंक अवश्य आयेगा, छात्र के परीक्षा देने पर या तो वह पास होगा या फेल। सिक्के के उछालने पर या तो वह पट गिरेगा या चित्त।

(v) संयुक्त घटनायें (Compound Events)—जब दो या दो से अधिक घटनायें एक साथ घटती हैं, अर्थात् उनका घटना एक-दूसरे से जुड़ा होता है, संयुक्त घटनायें कहलाती हैं। जैसे—दो पासों को एक साथ फेंकने से दोनों पर आई हुई संख्याओं का योग 8 होना एक संयुक्त घटना है। ताश के पत्तों में से एक साथ दो पत्ते खींचने पर एक पत्ता बेगम हो तथा दूसरा बादशाह, संयुक्त घटना है।

3. प्रायिकता पर प्रमेय (Theorems on Probabilities) :

(1) योग प्रमेय (Addition Theorem)—इस प्रमेय के अनुसार, "यदि दो घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं अर्थात् एक घटना के घटने पर दूसरी घटना नहीं घट सकती। यदि एक घटना A के घटने की प्रायिकता p_1 तथा दूसरी घटना B के घटने की प्रायिकता p_2 है तो दोनों में से किसी भी एक घटना के घटने की प्रायिकता $(p_1 + p_2)$ अर्थात् प्रायिकताओं के योग के बराबर होती है।"

अतः दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं A तथा B में से किसी एक घटना के घटित होने की प्रायिकता,

$$P(A \cup B) = P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) = p_1 + p_2$$

दो से अधिक घटनाओं में से किसी एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

$$P(A \text{ or } B \text{ or } C \text{ or } ...) = P(A) + P(B) + P(C) + ...$$

(2) गुणन प्रमेय (Multiplication Theorem)—यदि दो घटनायें परस्पर स्वतन्त्र घटनायें हैं अर्थात् किसी एक के घटित होने का दूसरी घटना के घटित होने या न होने में कोई प्रभाव नहीं पड़ता तथा यदि एक घटना के घटने की प्रायिकता p_1 तथा दूसरी घटना B के घटने की प्रायिकता p_2 है तो दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता दोनों की अलग-अलग प्रायिकताओं के गुणनफल $(p_1 \times p_2)$ के बराबर होती है। अतः

दो स्वतन्त्र घटनाओं A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता,

$$P(A \cap B) = P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B) = p_1 \times p_2$$

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 6. दो व्यक्तियों A तथा B की दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ और B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है। उन दोनों में से किसी भी एक व्यक्ति के जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : A व B के जीतने की घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं क्योंकि दोनों एक साथ नहीं जीत सकते। एक समय पर केवल एक व्यक्ति ही जीतेगा।

अव प्रश्न के अनुसार, A के जीतने की प्रायिकता $P(A) = \frac{1}{5}$, B के जीतने की प्रायिकता $P(B) = \frac{1}{3}$

www.polytechnickakaan.in

Scanned by CamScanner

अतः दोनों में से किसी एक के जीतने की प्रायिकता, $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$ उत्तर

उदाहरण 7. एक पासे की दो फेंकों में प्रत्येक बार अंक 2 प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : $\because$ पासा फेंकने पर 6 अंकों $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में से कोई भी एक अंक आ सकता है।

अतः पासे के प्रथम फेंक में कुल परिस्थितियों की संख्या = 6 इसी प्रकार दूसरी फेंक में भी कुल परिस्थितियाँ = 6

प्रत्येक फेंक में अंक 2 प्राप्त करने की अनुकूल परिस्थितियाँ = 1

$\Rightarrow$ प्रथम फेंक में अंक 2 प्राप्त करने की प्रायिकता $P(A) = \frac{1}{6}$

तथा दूसरी फेंक में अंक 2 प्राप्त करने की प्रायिकता $P(B) = \frac{1}{6}$

$\because$ प्रत्येक फेंक में 2 के अंक का आना एक स्वतन्त्र (independent) घटना है,

अतः दोनों फेंकों में 2 का अंक प्राप्त करने की प्रायिकता, $P = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ उत्तर

उदाहरण 8. दो पांसों की फेंक में 10 का योग प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : दो पांसों की एक फेंक में 10 का योग प्राप्त करने की परिस्थितियाँ $= \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\} = 3$ हैं

$\because$ दो पांसों की फेंक में कुल $6 \times 6 = 36$ परिणाम (परिस्थितियाँ) सम्भव हैं।

अभीष्ट प्रायिकता, $p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ उत्तर

उदाहरण 9. तीन सुडौल सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात करो जबकि (i) प्रत्येक पर चित्त (Head) मिले (ii) दो चित्त (Heads) तथा एक पट (Tail) मिले।

हल : $\because$ एक सिक्के की एक उछाल में 2 परिणाम मिलते हैं चित्त अथवा पट

$\therefore$ तीन सिक्कों की एक उछाल में कुल परिणाम $= 2^3 = 8$ $\therefore$ कुल परिस्थितियों की संख्या = 8

(i) प्रत्येक पर चित्त (Head) प्राप्त करने की घटना का समुच्चय $= \{(H, H, H)\}$

$\therefore$ अनुकूल परिस्थितियों की संख्या = 1 $\Rightarrow$ अभीष्ट प्रयिकता $= \frac{1}{8}$ उत्तर

(ii) दो पर चित्त तथा एक पर पट आने की घटना का अनुकूल समुच्चय $= \{(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)\}$

$\Rightarrow$ अनुकूल परिस्थितियों की संख्या = 3 $\Rightarrow$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{3}{8}$ उत्तर

उदाहरण 10. एक थैले में 6 लाल, 4 पीली तथा 2 काली गेंदे हैं। थैले में से 3 गेंदे याद्दच्छय (at random) निकाली जाती हैं। तीनों के भिन्न रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : थैले में 6 लाल, 4 पीली तथा 2 काली कुल 12 गेंदें हैं।

थैले में से एक गेंद निकालने पर उसके लाल होने की प्रायिकता $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

अब थैले में 11 गेंदें हैं। दूसरी गेंद निकालने पर, उसके पीली होने की प्रायिकता $= \frac{4}{11}$

शेष 10 गेंदों में तीसरी गेंद निकालने पर, उसके काली होने की प्रायिकता $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ गेंदों के इस क्रम में निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{55}$

विभिन्न रंगों की गेंदें $3! = 6$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं (लाल, पीली, काली; लाल, काली, पीली; पीली, लाल, काली; पीली, काली, लाल; काली, लाल, पीली; काली, पीली, लाल RYB; RBY; YRB; YBR; BRY; BYR)

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= 6 \times \frac{2}{55} = \frac{12}{55}$ उत्तर

दूसरी विधि : $p = \frac{{}^6C_1 \times {}^4C_1 \times {}^2C_1}{{}^{12}C_3} = \frac{12}{55}$ उत्तर

उदाहरण 11. एक थैले में 4 लाल, तीन हरी गेंदें हैं। यदि एक समय पर एक गेंद निकाली जाये तो पहली लाल, दूसरी हरी, तीसरी लाल, चौथी हरी इसी क्रम से सभी गेंदों को निकालने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : पहली बार में लाल गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{4}{7}$ ($\because$ कुल 7 हैं जिनमें 4 लाल हैं)

दूसरी बार में हरी गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{3}{6}$ ($\because$ कुल 6 हैं जिनमें 3 हरी हैं)

तीसरी बार में लाल गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{3}{5}$ ($\because$ कुल 5 हैं जिनमें 3 लाल हैं)

चौथी बार में हरी गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{2}{4}$ ($\because$ कुल 4 हैं जिनमें 2 हरी हैं)

पाँचवीं बार में लाल गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$ ($\because$ कुल 3 हैं जिनमें 2 लाल हैं)

छठी बार में हरी गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$ ($\because$ कुल 2 हैं जिनमें 1 हरी हैं)

सातवीं बार में लाल गेंद निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{1}$ ($\because$ कुल 1 हैं जो लाल है)

$\therefore$ अतः अभीष्ट क्रम में गेंदें निकलने की प्रायिकता,

$$p = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{35}$$ उत्तर

उदाहरण 12. बच्चों के तीन समुदायों में क्रमशः 3 लड़कियाँ और 1 लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के तथा 1 लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समुदाय से याद्दच्छया (at random) एक बच्चा चुना जाता है। सिद्ध करो कि तीन चुने हुए बच्चों में 1 लड़की और 2 लड़के होने की प्रायिकता $\frac{13}{32}$ है।

हल : पहले समुदाय से लड़की, दूसरे से लड़का तथा तीसरे से लड़का (G, B, B) चुने जाने की प्रायिकता

$$p_1 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

पहले समुदाय से लड़का, दूसरे से लड़की तथा तीसरे से लड़का (B, G, B) चुने जाने की प्रायिकता

$$p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

पहले समुदाय से लड़का, दूसरे से लड़का तथा तीसरे से लड़की (B, B, G) चुने जाने की प्रायिकता,

$$p_3 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

यह सभी घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं। अतः योग प्रमेय से, चुनाव में 1 लड़की और 2 लड़के होने की प्रायिकता,

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$$ सिद्धम्

उदाहरण 13. एक थैले में 3 सफेद तथा 4 काली गेंदें हैं। एक गेंद निकाली जाती है, उसका रंग देख लिया जाता है फिर एक तरफ रख दी जाती है। तत्पश्चात् दूसरी गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात करो कि यह (i) सफेद गेंद है (ii) काली गेंद है।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

हल : कुल गेंदें = 7, सफेद गेंदें = 3, काली गेंदें = 4

(i) पहली गेंद काली तथा दूसरी गेंद सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

पहली गेंद सफेद तथा दूसरी गेंद भी सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$ **उत्तर**

(ii) पहली गेंद काली तथा दूसरी भी काली होने की प्रायिकता $= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$

पहली गेंद सफेद तथा दूसरी काली होने की प्रायिकता $= \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$ **उत्तर**

उदाहरण 14. A के एक लाटरी में 3 शेयर हैं जिनमें 3 इनाम तथा 6 रिक्त हैं। B का एक अन्य लाटरी में 1 शेयर है जिसमें 1 इनाम और 2 रिक्त हैं। दिखाओ कि A के जीतने की प्रायिकता तथा B के जीतने की प्रायिकता में 16 : 7 का अनुपात है।

(उ० प्र० डिप्लोमा 1998)

हल : ∵ A के लाटरी में, जिसमें 6 रिक्त स्थान हैं तथा 3 इनाम हैं, 3 शेयर हैं

∴ A के न जीतने की प्रायिकता $= \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{21}$ ⇒ A के जीतने की प्रायिकता $= 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

∵ B का एक अन्य लाटरी में, जिसमें 2 रिक्त स्थान हैं तथा 1 इनाम है, एक शेयर है।

∴ B के न जीतने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$ ⇒ B के जीतने की प्रायिकता $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

∴ इन प्रायिकताओं में अनुपात $= \frac{16/21}{1/3} = 16 : 7$ **सिद्धम्**

उदाहरण 15. एक पासे की तीन फेंकों में 16 का योग प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : ∵ पासे की एक फेंक में 6 परिणाम सम्भव हैं ∴ पासे की तीन फेंकों में कुल परिस्थितियाँ $= 6^3 = 216$

16 का योग प्राप्त करने के लिए अनुकूल परिस्थितियाँ

$$= \{(6, 6, 4), (6, 5, 5), (6, 4, 6), (5, 6, 5), (5, 5, 6), (4, 6, 6)\} = 6$$

∴ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ **उत्तर**

उदाहरण 16. एक थैले में से, जिसमें 6 सफेद तथा 4 काली गेंदें है, 5 गेंदें निकाली जाती हैं। 3 सफेद तथा 2 काली गेंदें निकलें इसकी प्रायिकता ज्ञात करो।

(उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

हल : कुल गेंदें 10 हैं। इनमें से 5 गेंदे $^{10}C_5$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं। 6 सफेद तथा 4 काली गेंदों में से क्रमशः 3 सफेद तथा 2 काली गेंदें $^6C_3 \times {}^4C_2$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं।

अतः कुल परिस्थितियाँ $= {}^{10}C_5 = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$

अनुकूल परिस्थितियाँ $= {}^6C_3 \times {}^4C_2 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 120$

∴ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{120}{252} = \frac{10}{21}$ **उत्तर**

उदाहरण 17. ताश के 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकाले गये हैं। एक के राजा तथा दूसरे के रानी होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

(उ० प्र० डिप्लोमा 1994)

हल : ताश में 4 पत्ते बादशाह (राजा) हैं। उनमें से एक बादशाह $^4C_1$ प्रकार से निकाला जा सकता है। चार ही रानियां हैं। एक रानी भी $^4C_1$ प्रकार से निकाली जा सकती है। 52 पत्तों में से 2 पत्ते $^{52}C_2$ प्रकार से निकाले जा सकते हैं। अतः 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकालने पर एक के राजा तथा दूसरे के रानी होने की प्रायिकता,

$$p = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^{52}C_2} = \frac{4 \times 4 \times 2 \times 1}{52 \times 51} = \frac{8}{663}$$ **उत्तर**

उदाहरण 18. एक थैले में 9 लाल, 7 सफेद तथा 4 काली गेंदें हैं। उनमें से यादृच्छया 2 गेंदें निकाली जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात करो कि (i) दोनों लाल हैं, (ii) एक सफेद है, (iii) दोनों ही एक रंग की हैं, (iv) एक सफेद, दूसरी लाल है।

हल : कुल 9 + 7 + 4 = 20 गेंदें हैं। उनमें 2 गेंदें $^{20}C_2$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं। अतः कुल स्थितियां $= {}^{20}C_2$

(i) 9 लाल गेंदों में से 2 लाल गेंदें $^9C_2$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं। अतः अनुकूल स्थितियाँ $= {}^9C_2$

⇒ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^9C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{9 \times 8}{20 \times 19} = \frac{18}{95}$ **उत्तर**

(ii) एक गेंद सफेद $^7C_1$ प्रकार से तथा दूसरी गेंद लाल अथवा काली अर्थात् 13 गेंदों में से एक गेंद $^{13}C_1$ प्रकार से निकाली जा सकती है।

∴ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^7C_1 \times {}^{13}C_1}{{}^{20}C_2} = \frac{7 \times 13 \times 2 \times 1}{20 \times 19} = \frac{91}{190}$ **उत्तर**

(iii) दोनों गेंदें एक ही रंग की $({}^9C_2 + {}^7C_2 + {}^4C_2)$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं।

∴ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^9C_2 + {}^7C_2 + {}^4C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{9 \times 8 + 7 \times 6 + 4 \times 3}{20 \times 19} = \frac{63}{190}$ **उत्तर**

(iv) एक गेंद सफेद तथा दूसरी लाल होने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^7C_1 \times {}^9C_1}{{}^{20}C_2} = \frac{7 \times 9 \times 2 \times 1}{20 \times 19} = \frac{63}{190}$$ **उत्तर**

उदाहरण 19. ताश के 52 पत्तों में से दो पत्ते खींचे जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात करो कि वे या तो लाल हैं या बादशाह हैं।

हल : दोनों पत्ते या तो लाल हों या बादशाह हों, ये घटनायें परस्पर अपवर्जी घटनायें नहीं हैं। चूँकि ऐसा भी सम्भव है कि खींचे गये दोनों पत्ते लाल भी हैं और बादशाह भी हैं (लाल बादशाह) अर्थात् दोनों घटनायें लाल होने की या बादशाह होने की एक साथ भी घट सकती हैं। अतः

$$P(R \cup K) = P(R) + P(K) - P(R \cap K)$$

$$= \frac{{}^{26}C_2}{{}^{52}C_2} + \frac{{}^4C_2}{{}^{52}C_2} - \frac{{}^2C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{26 \times 25}{52 \times 51} + \frac{4 \times 3}{52 \times 51} - \frac{2 \times 1}{52 \times 51}$$

$$= \frac{660}{52 \times 51} = \frac{55}{221}$$ **उत्तर**

उदाहरण 20. एक बक्से में 10 बल्ब हैं जिनमें से 3 खराब हैं। यदि यादृच्छय 5 बल्बों का नमूना चुना जाता है तो प्रायिकता ज्ञात करो कि उनमें (i) एक खराब बल्ब है; (ii) दो खराब बल्ब हैं; (iii) कोई भी खराब नहीं है।

हल : 10 बल्बों में से 5 बल्ब $^{10}C_5$ प्रकार से खींचे जा सकते हैं। अतः कुल स्थितियां $= {}^{10}C_5$

(i) एक खराब तथा 4 ठीक बल्ब होने की प्रायिकता $= \frac{{}^3C_1 \times {}^7C_4}{{}^{10}C_5} = \frac{5}{12}$ **उत्तर**

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(ii) दो खराब तथा 3 ठीक बल्ब होने की प्रायिकता $= \dfrac{{}^3C_2 \times {}^7C_3}{{}^{10}C_5} = \dfrac{5}{12}$ उत्तर

(iii) सभी बल्ब सही होने की प्रायिकता $= \dfrac{{}^7C_5}{{}^{10}C_5} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \dfrac{1}{12}$ उत्तर

उदाहरण 21. एक थैले में 1, 2, 3,...., 50 संख्याओं वाली 50 टिकटें हैं। 5 टिकटें यादृच्छया निकाली जाती है और उन्हें $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ के बढ़ते क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। प्रायिकता ज्ञात करो कि x_3 पर 30 का नंबर अंकित है।

हल : दो टिकटें 1 से 29 संख्याओं में से आनी चाहिये जो ${}^{29}C_2$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं। एक टिकट 30 नम्बर वाली आनी चाहिये जो ${}^1C_1$ प्रकार से निकाली जा सकती है और दो टिकटें 31 से 50 तक संख्याओं में से आनी चाहिये जो ${}^{20}C_2$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं जबकि 50 में से 5 टिकटें ${}^{50}C_5$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं। अतः

$$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{{}^{29}C_2 \times {}^1C_1 \times {}^{20}C_2}{{}^{50}C_5}$$

$$= \frac{(29 \times 28 \times 1 \times 20 \times 19)\,(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{2 \times 1 \times 2 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46} = \frac{551}{15134}$$ उत्तर

उदाहरण 22. एक कक्षा में 80 विद्यार्थी हैं जिनमें 25 लड़कियाँ तथा 55 लड़के हैं। उनमें 10 धनवान तथा शेष गरीब हैं। 20 अति सुन्दर हैं। एक विद्यार्थी को चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात करो कि चुना गया विद्यार्थी एक अति सुन्दर धनवान लड़की है।

हल : चुने गये विद्यार्थी के लड़की होने की प्रायिकता $= \dfrac{25}{80}$

चुने गये विद्यार्थी के धनवान होने की प्रायिकता $= \dfrac{10}{80}$

चुने गये विद्यार्थी के सुन्दर होने की प्रायिकता $= \dfrac{20}{80}$

चुने गये विद्यार्थी के एक सुन्दर धनवान लड़की होने की प्रायिकता

$$= \frac{20}{80} \times \frac{10}{80} \times \frac{25}{80} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{512}$$ उत्तर

उदाहरण 23. A, B, C तीन विद्यार्थियों द्वारा एक प्रश्न को हल कर लेने की प्रायिकतायें $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}$ तथा $\frac{3}{8}$ हैं। यदि तीनों हल करने का प्रयास करते हैं तो प्रायिकता ज्ञात करो कि :

(i) कोई भी विद्यार्थी प्रश्न हल नहीं कर पायेगा।
(ii) कम से कम एक विद्यार्थी प्रश्न हल कर देगा।
(iii) केवल एक विद्यार्थी ही प्रश्न कर पायेगा।
(iv) दो विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेंगे।
(v) अधिक से अधिक दो विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेंगे।
(vi) तीनों विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेंगे।

हल : (i) कोई भी विद्यार्थी प्रश्न हल नहीं कर पायेगा, इस की प्रायिकता

$$P(E_1) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \times P(\bar{C})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{2}{7}\right) \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{84}$$ उत्तर

(ii) कम से कम एक विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेगा, इसकी प्रायिकता, $P(E_2) = 1 - \dfrac{25}{84} = \dfrac{84 - 25}{84} = \dfrac{59}{84}$ उत्तर

(iii) केवल एक ही विद्यार्थी प्रश्न हल कर पायेगा, इसकी प्रायिकता

$$P(E_3) = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

$$= P(A) \times P(\bar{B}) \times P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \times P(B) \times P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \times P(C)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{7}\right) \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{7} \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{2}{7}\right) \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{75}{168} = \frac{25}{56}$$ उत्तर

(iv) केवल दो विद्यार्थी ही प्रश्न हल कर पायेंगे, इसकी प्रायिकता

$$P(E_4) = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C)$$

$$= P(A) \times P(B) \times P(\bar{C}) + P(A) \times P(\bar{B}) \times P(C) + P(\bar{A}) \times P(B) \times P(C)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{7}\right) \times \frac{3}{8} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{37}{168}$$ उत्तर

(v) अधिक से अधिक दो विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेंगे, इसकी प्रायिकता

$$= P(E_1) + P(E_3) + P(E_4) = \frac{25}{84} + \frac{25}{56} + \frac{37}{168} = \frac{162}{168}$$ उत्तर

(vi) तीनों विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेंगे, इसकी प्रायिकता

$$= P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{28}$$ उत्तर

उदाहरण 24. एक पांसे को चार बार फेंका जाता है। प्रत्येक बार एक ही अंक के आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : पहली बार में पांसे पर कोई भी अंक आ सकता है जिसका आने की प्रायिकता $\frac{6}{6} = 1$ है। दूसरी बार में उसी अंक के आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$, तीसरी बार में भी उसी अंक के आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ तथा चौथी बार में भी उसी अंक के आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। अतः चारों बार में एक ही अंक आने की प्रायिकता $= 1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ उत्तर

उदाहरण 25. यदि A, 60% स्थितियों में सत्य बोलता है तथा B, 90% स्थितियों में सत्य बोलता है तो किसी एक कथन में उनके एक-दूसरे के विरोधभासी होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : A के सत्य बोलने की प्रायिकता, $P(A) = \dfrac{60}{100}$, A के सत्य न बोलने की प्रायिकता, $P(\bar{A}) = \dfrac{40}{100}$

B के सत्य बोलने की प्रायिकता, $P(B) = \dfrac{90}{100}$, B के सत्य न बोलने की प्रायिकता, $P(\bar{B}) = \dfrac{10}{100}$

$$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{4200}{100 \times 100} = \frac{21}{50}$$ उत्तर

उदाहरण 26. दो व्यक्ति A तथा B एक पांसे को बारी-बारी से फेंकते हैं और वह जीतता है जो पहले 3 का अंक प्राप्त करता है। उनके जीतने की प्रायिकतायें ज्ञात करो यदि खेल A आरम्भ करता है।

हल : $P(A) = A$ द्वारा 3 का अंक प्राप्त करने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{6}$, $P(\bar{A}) = 3$ का अंक न आने की प्रायिकता $= \dfrac{5}{6}$

$P(B) = B$ द्वारा 3 का अंक प्राप्त करने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{6}$, $P(\bar{B}) = 3$ का अंक न आने की प्रायिकता $= \dfrac{5}{6}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

A जीतेगा यदि वह पहली फेंक में अथवा तीसरी फेंक मे अथवा पांचवी फेंक में 3 का अंक प्राप्त करता है। A तीसरी फेंक तब फेंकेगा जब उसे पहली फेंक मे 3 का अंक प्राप्त नही हुआ और न ही B को अपनी पहली फेंक में 3 का अंक प्राप्त हुआ है। इसी प्रकार A पांचवी फेंक तब फेंकेगा जब चौथी फेंक तक किसी की जीत नही हुई,......... आदि।

$$A \text{ के प्रथम फेंक मे जीतने की प्रायिकता} = \frac{1}{6}$$

तब A के तीसरी फेंक मे जीतने की प्रायिकता $= P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$

इसी प्रकार से A के पाँचवीं फेंक में जीतने की प्रायिकता $= P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(A)$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ A के जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \ldots\ldots \infty$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \ldots\ldots \infty\right]$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-(5/6)^2} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11}$$

B के जीतने की प्रायिकता $= 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$ उत्तर

4. किसी घटना का अनुकूल तथा प्रतिकूल संयोगानुपात
(Odds in favour and Odds against of *an* event) :

यदि $a : b$ किसी घटना का अनुकूल संयोगानुपात है तो इसका अर्थ है कि घटना के घटित होने की प्रायिकता $\frac{a}{a+b}$ है तथा घटना के न घटने की प्रायिकता $\frac{b}{a+b}$ है, और यदि $a : b$ किसी घटना का प्रतिकूल संयोगानुपात है तब घटना घटने की प्रायिकता $\frac{b}{a+b}$ है तथा घटना के न घटने की प्रायिकता $\frac{a}{a+b}$ है।

उदाहरण 27. एक घटना का प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 2 है तथा एक अन्य घटना का अनुकूल संयोगानुपात 6 : 5 है। यदि दोनों घटनायें स्वतन्त्र हैं तो इन घटनाओं में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : पहली घटना के घटने की प्रायिकता $= \frac{2}{7}$ तथा न घटने की प्रायिकता $= \frac{5}{7}$

दूसरी घटना के घटने की प्रायिकता $= \frac{6}{11}$ तथा न घटने की प्रायिकता $= \frac{5}{11}$

किसी भी घटना के न घटने की प्रायिकता $= \frac{5}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{25}{77}$

$\therefore$ कम से कम एक घटना के घटने की प्रायिकता $= 1 - \frac{25}{77} = \frac{77-25}{77} = \frac{52}{77}$ उत्तर

उदाहरण 28. 40 वर्ष के एक व्यक्ति के 70 वर्ष तक जीवित रहने का प्रतिकूल संयोगानुपात 8 : 5 है और 50 वर्ष के व्यक्ति के 80 वर्ष तक जीवित रहने का प्रतिकूल संयोगानुपात A : 3 है। उनमें से किसी एक के अगले 30 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : पहले व्यक्ति के अगले 30 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता, $P(A) = \frac{5}{13}$

दूसरे व्यक्ति के अगले 30 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता, $P(B) = \frac{3}{7}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= P(A) \times P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(B)$

$$= \frac{5}{13} \times \left(1 - \frac{3}{7}\right) + \left(1 - \frac{5}{13}\right) \times \frac{3}{7}$$

$$= \frac{5}{13} \times \frac{4}{7} + \frac{8}{13} \times \frac{3}{7} = \frac{44}{91}$$ उत्तर

अभ्यासमाला 19

1. (i) एक घटना के घटित होने की प्रायिकता $\frac{1}{8}$ है। इस घटना के घटित न होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
   (ii) एक पासे के फेंकने में 5 आने की प्रायिकता है ?
2. एक पासे की फेंक में 3 से बड़ा अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2011)
3. किसी सामान्य वर्ष (non-leap year) में 53 सोमवार होने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 200, 07)
4. यदि 52 ताशों की गड्डी में से एक ताश खींचा जाये तो उसके इक्का या हुकम का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)
5. एक कक्षा में 15 विद्यार्थी हैं जिनमें 7 लड़के तथा शेष लड़कियाँ हैं। यदि कक्षा में से एक विद्यार्थी चुना जाये तो इसके लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
6. एक थैले में 7 लाल और 5 काली गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छय निकालने पर उसके (i) लाल (ii) काली होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
7. (i) एक थैले में 14 गेंदें हैं जिनमें 3 लाल है, 7 सफेद हैं और शेष काली हैं। यदि उनमें से 3 गेंदें निकाली जायें तो उनके एक ही रंग की होने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1993, 96, 2001)
   (ii) एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद और 7 काली गेन्दे हैं। दो गेन्द निकालने पर प्रायिकता क्या होगी कि गेंद सफेद और काली हों ? (उ० प्र० डिप्लोमा 2010)
8. ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से 2 पत्ते यादृच्छय खींचे जायें तो (i) दोनों के बादशाह होने, (ii) भिन्न-भिन्न रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
9. 19 चिटों पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, ..., 19 संख्यायें लिखी हुई हैं। उनमें से यादृच्छय एक चिट खींची जाती है। सिद्ध करो कि इसकी प्रायिकता, कि वह संख्या जो चिट पर लिखी हुई है, 3 या 7 से विभाज्य है, $\frac{8}{19}$ है।
10. एक घटना के घटित होने की प्रायिकता दूसरी के घटित होने की प्रायिकता का वर्ग है। किन्तु पहली घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात (odds against), दूसरी घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात का घन (cube) है। प्रत्येक की प्रायिकता ज्ञात करो।
11. एक खेल को A व B खेलते हैं। खेल को A द्वारा जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ तथा B द्वारा जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। उन दोनों में से किसी एक के जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो। किसी के भी न जीतने की प्रायिकता भी ज्ञात करो।

www.polytechnicmahar.in

Scanned by CamScanner

12. एक थैले में 4 सफेद, 2 काली तथा 3 पीली गेंदें हैं। थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकालने पर उसके सफेद या पीली होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

13. किसी खेल में चार टीमों की जीतने की प्रायिकतायें $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ हैं। किसी एक टीम के जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो।

14. एक दौड़ में भाग लेने वाले तीन व्यक्तियों के अनुकूल संयोगानुपात 1 : 3, 2 : 7, 11 : 4 हैं। किसी भी एक के जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो।

15. पासे की एक फेंक में 2 से बड़ा अथवा सम अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो।

16. ताश की गड्डी में से 4 ताश दोबारा बिना गड्डी में रखे हुए खींचे जाते हैं तो प्रायिकता ज्ञात करो कि वे सभी इक्के होंगे।

17. A किसी लक्ष्य को 5 बार में से 4 बार भेद सकता है। B उसे 4 बार में से 3 बार और C उसे 3 में से 2 बार भेद सकता है। वे एक साथ निशाना लगाते हैं। कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा निशाना लगाये जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

18. एक पासे को एक बार फेंकने में 4 तथा दो बार में 8 का योग प्राप्त करने की प्रायिकताओं की तुलना करो।

19. तीन पासे एक साथ फेंके जाते हैं। 15 से अधिक योग प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)

20. 10 रुपयों तथा 5 दस पैसों के सिक्कों को अनियमित रूप से एक सरल रेखा में रखा जाता है। सिरों पर रुपये आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

21. लक्ष्य भेदन की एक प्रतियोगिता में A व B के लक्ष्य भेदन की प्रायिकतायें क्रमशः $\frac{2}{5}$ तथा $\frac{1}{5}$ हैं तो
(i) इनमें से किसी एक के लक्ष्य भेदन की प्रायिकता ज्ञात करो। (ii) दोनों द्वारा लक्ष्य भेदन की प्रायिकता ज्ञात करो।
(iii) कम से कम एक द्वारा लक्ष्य भेदन की प्रायिकता ज्ञात करो।

22. गणित का एक प्रश्न तीन विद्यार्थियों को हल करने के लिए दिया गया। यदि उनके द्वारा प्रश्न को हल किये जाने की प्रायिकतायें क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ हैं और वे सभी प्रश्न को हल करने का प्रयत्न करते हैं तो प्रश्न के हल न होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

23. एक थैली में रुपये की 1 मुद्रा तथा पचास पैसे की 3 मुद्रा हैं। दूसरी थैली में रुपये की 2 तथा पचास पैसे की 1 मुद्रा है और तीसरी थैली में रुपये की 1 तथा पचास पैसे की 1 मुद्रा है। यदि तीनों थैली में से किसी एक थैली से एक मुद्रा निकाली जाये तब इसके रुपये की मुद्रा होने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)

संकेत : पहली थैली चुने जाने की प्रा० $= \frac{1}{3}$ तथा उसमें से रुपये की मुद्रा निकाले जाने की प्रा० $= \frac{1}{4}$। दूसरी थैली चुने जाने की प्रा० $= \frac{1}{3}$ तथा उसमें से रुपये की मुद्रा निकाले जाने की प्रा० $= \frac{2}{3}$। तीसरी थैली को चुने जाने की प्रा० $= \frac{1}{3}$ तथा उसमें से रुपये की मुद्रा निकाले जाने की प्रा० $= \frac{1}{2} \Rightarrow$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{36}$ उत्तर

24. एक कमेटी 9 छात्रों की है जिसमें दो छात्र प्रथम वर्ष से, तीन द्वितीय वर्ष से तथा चार तृतीय वर्ष से हैं। तीन छात्र चुने गये हैं। प्रायिकता ज्ञात करो जबकि (i) तीनों छात्र अलग-अलग कक्षाओं के हैं (ii) तीनों छात्र एक ही कक्षा के हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 96)

25. चार व्यक्ति एक ताश की गड्डी से एक-एक ताश खींचते हैं। इनमें चारों रंग के ताश आने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1998, 99)

26. यदि पाँच व्यक्तियों A, B, C, D, E में से किसी कमेटी में तीन व्यक्ति चुने जाते हैं तो
(i) A तथा B दोनों के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।
(ii) A के न चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)

27. दो अच्छी डाईस का जोड़ा फेंका जाता है। योग 10 या अधिक आने की सम्भाविता ज्ञात करो जबकि
(i) 5 प्रथम डाईस पर नजर आये। (ii) 5 कम से कम एक डाइस पर दिखाई दे। (उ० प्र० डिप्लोमा 1991)

28. तीन पासे एक साथ फेंके गये हैं। (i) कम से कम 6 का योग प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो। (ii) इन तीनों पर आये अंको का योग 15 से अधिक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)

29. ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छय खींचा गया है। पत्ते के लाल अथवा बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

30. एक टोकरी में 20 सेब तथा 10 सन्तरे हैं जिनमें 5 सेब तथा 3 सन्तरे खराब हैं। एक व्यक्ति यादृच्छय 2 फल निकालता है। दोनों के सेब अथवा दोनों अच्छे फल होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

31. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं। एक-एक करके चार बार गेंद निकाली जाती है और हर बार वापस थैले में रख दी जाती है। प्रायिकता ज्ञात करो कि (i) कोई भी गेंद सफेद नहीं है, (ii) चारों गेंद सफेद हैं।

32. एक थैले में 6 सफेद तथा 5 लाल गेंदें हैं। एक के बाद दूसरी गेंद निकाली गई है। दूसरी गेंदें के लाल होने की प्रायिकता ज्ञात करो यदि पहली गेंद सफेद थी।

33. A, 70% स्थितियों में सत्य बोलता है तथा B, 80% स्थितियों में सत्य बोलता है। किसी एक स्थिति में दोनों के (i) कथनों का विरोधाभासी होने की, (ii) कथन एक समान होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

34. एक पति, जो 45 वर्षीय है, के 70 वर्ष की आयु तक जीवित रहने का प्रतिकूल संयोगानुपात 7 : 5 है तथा उस की पत्नी, जो इस समय 36 वर्ष की है, 61 वर्ष तक जीवित रहने का प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 3 है। प्रायिकता ज्ञात करो कि अगले 25 वर्षों तक (i) कोई एक जीवित रहेगा (ii) कोई भी जीवित नहीं रहेगा, (iii) कम से कम एक जीवित रहेगा (iv) दोनों जीवित रहेंगे।

35. एक थैले में 3 सफेद, 3 काली तथा 2 लाल गेंदें हैं। एक-एक करके तीन गेंदे निकाली गई हैं। प्रायिकता ज्ञात करो कि तीसरी गेंद लाल है।

36. A तथा B एक सिक्के को इस शर्त के साथ बारी-बारी फेंकते है कि जो पहले शीर्ष फेंकेगा, जीतेगा। इनके जीतने की सम्भावनायें ज्ञात कीजिए यदि A पहले फेंकना आरम्भ करता है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)

37. एक सुडौल सिक्के को बार-बार उछाला गया। यदि प्रथम 4 उछालों में पुच्छ (Tail) आया हो तो पांचवी उछाल में शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

38. यदि n व्यक्ति एक सरल रेखा में बैठे हैं और उनमें से 2 व्यक्ति चुने जाते है। प्रायिकता ज्ञात करो कि चुने हुये व्यक्ति एकसाथ नहीं बैठे थे।

39. A तथा B को कहा जाता है कि 1 से 25 तक की संख्याओं में से एक-एक संख्या चुनो। यदि दोनों द्वारा चुनी हुई संख्या एक ही हुई तो दोनों को इनाम मिलेगा। प्रायिकता ज्ञात करो कि प्रथम प्रयास में इनाम नहीं मिलेगा। चार प्रयासों में से 2 प्रयासों में इनाम मिलने की सम्भावना भी ज्ञात करो।

40. एक थैले में 8 सफेद तथा 6 लाल गेंदें हैं। दो गेंद एक ही रंग की निकालने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

41. ताश के 52 पत्तों में से तीन पत्ते निकाले जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वे एक रंग के हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 1999)

42. किसी घुड़दौड़ में तीन घोड़ों के संयोगानुपात 1 : 2, 1 : 3 तथा 1 : 4 हैं। किसी एक घोड़े के जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)

Scanned by CamScanner

उत्तरमाला 19

1. (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{7}$ 4. $\frac{4}{13}$ 5. $\frac{8}{15}$

6. (i) $\frac{7}{12}$ (ii) $\frac{5}{12}$ 7. (i) $\frac{10}{91}$ (ii) $\frac{7}{20}$ 8. (i) $\frac{1}{221}$ (ii) $\frac{26}{51}$

10. $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}$ 11. $\frac{8}{15}, \frac{8}{15}$ 12. $\frac{7}{9}$ 13. $\frac{1207}{2520}$ 14. $\frac{121}{180}$

15. $\frac{5}{6}$ 16. $\frac{1}{270725}$ 17. $\frac{5}{6}$ 18. 6 : 5 19. $\frac{5}{108}$

20. $\frac{3}{7}$ 21. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{25}$ (iii) $\frac{13}{25}$ 22. $\frac{1}{4}$

23. $\frac{17}{36}$ 24. (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{84}$ 25. 0·1055

26. (i) $\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{2}{5}$ 27. (i) $\frac{1}{18}$ (ii) $\frac{1}{12}$

28. (i) $\frac{103}{108}$ (ii) $\frac{5}{108}$ 29. $\frac{7}{13}$ 30. $\frac{316}{435}$

31. (i) $\frac{14641}{65536}$ (ii) $\frac{625}{65536}$ 32. $\frac{1}{2}$ 33. (i) $\frac{19}{50}$ (ii) $\frac{31}{50}$

34. (i) $\frac{23}{48}$ (ii) $\frac{35}{96}$ (iii) $\frac{61}{96}$ (iv) $\frac{15}{96}$

35. $\frac{1}{4}$ 36. $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$ 37. $\frac{1}{2}$ 38. $\frac{2}{n}$

39. $\frac{24}{25}, \frac{3456}{390625}$ 40. $\frac{43}{91}$ 41. $\frac{4}{17}$ 42. $\frac{47}{60}$

20 द्विपद, प्रसामान्य तथा प्वॉयसन बंटन
(Binomial, Normal and Poisson Distribution)

1. परिचय (Introduction) :

आधुनिक सांख्यिकी में निम्न तीन प्रकार के बंटनों का अधिक प्रयोग किया जाता है।

1. द्विपद बंटन (Binomial Distribution)
2. प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution)
3. प्वॉयसन बंटन (Poisson Distribution)

(1) द्विपद बंटन (BINOMIAL DISTRIBUTION) (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

यदि एक सिक्के को उछाला जाये तो वह या तो चित्त गिरेगा या पट। यदि चित्त गिरने को सफलता माना जाये तथा पट गिरने को असफलता अथवा 0 सफलता कहा जाये और यदि सफलता तथा असफलता (0 सफलता) की प्रायिकतायें क्रमशः p तथा q हों तो हम कह सकते हैं कि

एक सिक्का उछालने पर, 0 तथा 1 सफलता की प्रायिकतायें क्रमशः q तथा p हैं।

अब यदि दो सिक्के A तथा B एक साथ उछाले जायें तो दोनों पर शीर्ष (Heads) आ सकते हैं या A पर शीर्ष (Head) तथा B पर पुच्छ (Tail) या A पर पुच्छ (Tail) तथा B पर शीर्ष आ सकता है या फिर दोनों पर पुच्छ (Tail) आ सकते हैं। यदि दोनों पर शीर्ष आने को 2 सफलतायें, किसी 1 पर शीर्ष आने को 1 सफलता तथा कोई शीर्ष न आने को 0 सफलता कहा जाये तो

$$2 \text{ सफलताओं की प्रायिकता} = p \times p = p^2$$
$$1 \text{ सफलता की प्रायिकता} = p \times q + q \times p = 2qp$$
$$0 \text{ सफलता की प्रायिकता} = q \times q = q^2$$

0, 1, 2 सफलताओं की प्रायिकतायें क्रमशः $q^2, 2qp$ तथा p^2 हैं जोकि द्विपद $(q + p)^2$ के उत्तरोत्तर (successive) पद हैं। इसी प्रकार, तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर, 0, 1, 2, 3 सफलताओं की प्रायिकतायें क्रमशः $q^3, 3q^2p, 3qp^2$ तथा p^3 हैं जोकि द्विपद $(q + p)^n$ के उत्तरोत्तर पद हैं।

अतः, यदि n सिक्के एक साथ उछाले जायें अर्थात् यदि n घटनायें एक साथ घटित हों तो घटना के 0, 1, 2, 3 ..... n बार सफल होने की प्रायिकता द्विपद $(q + p)^n$ के उत्तरोत्तर पद होंगे।

अब चूंकि $$(q + p)^n = q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \ldots + p^n \quad \ldots(1)$$

अतः 0, 1, 2, 3, ..., n सफलताओं की प्रायिकतायें क्रमशः (1) के उत्तरोत्तर पदों अर्थात् $q^n, nq^{n-1}p, \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2, \ldots, p^n$ के बराबर होंगी।

इस प्रायिकता वितरण (Probability Distribution) को द्विपद बंटन (Binomial Distribution) कहते हैं। चूंकि जेम्स बर्नोली ने इस बारम्बारता वितरण की व्याख्या की थी। इसलिए इसे बर्नोली वितरण या बर्नोली प्रमेय भी कहते हैं। इस प्रमेय के आधार पर एक ही समय में अभीष्ट सफलताओं की प्रायिकतायें ज्ञात की जा सकती हैं।

वितरण का व्यापक पद $^nC_r q^{n-r} p^r$ है जो r सफलताओं की प्रायिकता है।

$$r \text{ सफलताओं की प्रायिकता, } P(r) = {}^nC_r q^{n-r} p^r \quad \text{(सूत्र)}$$

www.polytechnichabar.in

Scanned by CamScanner

यदि n सिक्कों को N बार उछाला जाये अथवा एक साथ घटने वाली n घटनाओं को N बार दोहराया जाये तो 0, 1, 2, 3, ..., n सफलताओं की प्रायिकतायें $N(q+p)^n$ द्विपद के उत्तरोत्तर पदों के बराबर होगी अर्थात् $P(r) = N \cdot {}^nC_r q^{n-r} p^r$ स्पष्ट है कि द्विपद बंटन असंतत बारम्बारता बंटन (Discrete frequency distribution) है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. यदि एक प्रयास में सफलता मिलने की प्रायिकता $\frac{2}{3}$ हो तो 8 प्रयासों में 4 सफलतायें पाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : r सफलताओं की प्रायिकता $= {}^nC_r q^{n-r} p^r$ (सूत्र)

यहाँ पर, $p = \frac{2}{3}, \quad q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad n = 8, r = 4$

$\therefore$ 4 सफलताओं की प्रायिकता $= {}^8C_4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{8!}{4! \times 4!} \times \frac{1}{3^4} \times \frac{2^4}{3^4}$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{81} \times \frac{16}{81} = \frac{1120}{6561} = 171$$ उत्तर

उदाहरण 2. 12 सिक्कों को एक साथ उछाला गया है। निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात करो–

(i) 8 शीर्ष आने की प्रायिकता **(ii) 0 शीर्ष आने की प्रायिकता**

(iii) कम से कम 10 शीर्ष आने की **(iv) अधिक से अधिक 3 शीर्ष आने की**

हल : $n = 12, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

(i) 8 शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{12!}{8! \times 4!} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{256}$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{256} = \frac{495}{4096} = 0.121$$ उत्तर

(ii) $n = 12, r = 0, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

0 शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4096} \times 1 = \frac{1}{4096} = 0.00024$ उत्तर

(iii) कम से कम 10 शीर्ष आने की प्रायिकता = 10, 11, 12 शीर्षों के आने की प्रायिकताओं का योग

10 शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1024} = \frac{33}{2048} = 0.01611$

11 शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2048} = \frac{3}{1024} = 0.00293$

12 शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 1 \times 1 \times \frac{1}{4096} = \frac{1}{4096} = 0.00024$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 0.01611 + 0.00293 + 0.00024 = 0.01928$ उत्तर

(iv) अधिक से अधिक 3 शीर्ष आने की प्रायिकता = 0, 1, 2 तथा 3 सफलताओं की प्रायिकतायों का योग

$$= {}^{12}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^0 + {}^{12}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{12}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}^{12}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 1 \times \frac{1}{2^{12}} \times 1 + 12 \times \frac{1}{2^{11}} \times \frac{1}{2} + 66 \times \frac{1}{2^{10}} \times \frac{1}{2^2} + 220 \times \frac{1}{2^9} \times \frac{1}{2^3}$$

$$= \frac{1}{2^{12}} \times (1 + 12 + 66 + 220) = \frac{299}{2^{12}} = \frac{299}{4096} = 0.073$$ उत्तर

उदाहरण 3. एक खेल में A के जीतने का संयोगानुपात 2 : 3 है। A द्वारा 5 खेलों में से (i) 3 खेलों में जीतने की प्रायिकता (ii) कम से कम 3 खेल जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : $\because$ खेल में A के जीतने का संयोगानुपात 2 : 3 है $\therefore$ A के खेल जीतने की प्रायिकता, $p = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow$ न जीतने की प्रायिकता, $q = \frac{3}{5}$

$\because$ 5 बार खेल खेलने पर प्रयोग की 5 बार पुनरावृत्ति होती है $\therefore n = 5$

(i) A द्वारा तीन खेलों में जीतने की प्रायिकता के लिए, $n = 5, r = 3, p = \frac{2}{5}, q = \frac{3}{5}$

$$p(A) = {}^5C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{9}{25} \times \frac{8}{125} = \frac{144}{625}$$ उत्तर

(ii) कम से कम तीन खेलों में जीतने की प्रायिकता = पांचों खेलों में जीतने की प्रा० + 4 खेलों में जीतने की प्रा० + 3 खेलों में जीतने की प्रा०

$$= {}^5C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^3 + {}^5C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^4 + {}^5C_5 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

$$= \frac{144}{625} + \frac{48}{625} + \frac{32}{3125} = \frac{992}{3125}$$ उत्तर

उदाहरण 4. एक शहर में संक्रामक रोग फैल जाने से वहाँ के 40% बच्चों के रोगी हो जाने की सम्भावना है। 8 बच्चों में से 6 या 6 से अधिक बच्चों के रोगी हो जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : रोगी हो जाने की प्रायिकता, $p = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, रोगी न होने की प्रायिकता, $q = 1 - p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

r सफलताओं की प्रायिकता $= {}^nC_r q^{n-r} p^r$

अभीष्ट प्रायिकता = 6, 7 तथा 8 बच्चों के रोगी होने की प्रायिकताओं का योग

$$= {}^8C_6 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^6 + {}^8C_7 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^7 + {}^8C_8 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^8$$

$$= \frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{9}{25} \times \frac{64}{15625} + 8 \times \frac{3}{5} \times \frac{128}{78125} + 1 \times 1 \times \frac{256}{390625}$$

$$= \frac{63 \times 256}{390625} + \frac{12 \times 256}{390625} + \frac{256}{390625}$$

$$= \frac{256}{390625}(63 + 12 + 1) = \frac{256 \times 76}{390625} = 0.050$$ उत्तर

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

उदाहरण 5. जानवरों में एक विशेष रोग के फैलने की सम्भावना 20% थी। 6 जानवरों को पहले से ही रोग से सम्बन्धित टीके लगा देने से यह पाया गया कि उनमें से किसी भी जानवर को रोग नहीं लगा। किये गये परीक्षण की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : रोग लगने की प्रायिकता, $p = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, रोग न लगने की प्रायिकता, $q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

6 जानवरों में से कोई भी जानवर रोगी नहीं हुआ। अत: हमें 0 सफलता की प्रायिकता ज्ञात करनी है जबकि $n = 6$

$\therefore$ 0 सफलता की प्रायिकता $= {}^6C_0 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1 \times \frac{4096}{15625} \times 1 = 0.262$ उत्तर

उदाहरण 6. 7 सिक्कों को यदि 256 बार उछाला जाये तो कितनी बार (i) तीन सिक्कों पर शीर्ष, (ii) सभी सिक्कों पर शीर्ष आने की आशा की जा सकती है ?

हल : शीर्ष आने की प्रायिकता, $p = \frac{1}{2}$, शीर्ष न आने की प्रायिकता, $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

सिक्कों की संख्या, $n = 7$; $\because$ घटना 256 बार दोहराई गई, $\therefore N = 256$

(i) तीन सिक्कों पर शीर्ष आने की प्रायिकता = 3 सफलतायें प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= N . {}^nC_r q^{n-r} p^r \quad \text{(सूत्र से)}$$

$$= 256 . {}^7C_3 . \left(\frac{1}{2}\right)^4 . \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 256 \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8}$$

$$= 256 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{128} = \frac{256 \times 35}{128} = 70 \text{ बार}$$ उत्तर

(ii) सभी सिक्कों पर शीर्ष आने की प्रायिकता $= 256 . {}^7C_7 . \left(\frac{1}{2}\right)^0 . \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 256 \times 1 \times \frac{1}{2^7} = \frac{256}{128} = 2$ बार उत्तर

उदाहरण 7. एक परिपूर्ण घनाकार डाई (cubical die) 8 के समूह में काफ़ी बार फेंकी जाती है। 5 या 6 आने की घटना को सफलता घोषित किया गया है। समूहों के कितने अनुपात में तुम 3 सफलतायें प्राप्त करने की आशा करते हो ?

(उ० प्र० डिप्लोमा 1998)

हल : डाई 8 के समूह में फेंकी गई का अर्थ है कि एक समय पर 8 डाई फेंकी गई हैं $\therefore n = 8$, तीन सफलताओं के लिए, $r = 3$

5 या 6 का अंक आने की प्रायिकता, $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

माना कि 8 डाई का समूह N बार फेंका गया तब, 3 सफलताओं की प्रायिकता $= N . {}^8C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$$= N \cdot \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{32}{243} \times \frac{1}{27} = \frac{1792 N}{6561}$$

अभीष्ट अनुपात $= \frac{1792 N}{6561 N} = \frac{1792}{6561} \Rightarrow$ % अनुपात $= \frac{1792}{6561} \times 100 = 27.31\%$ उत्तर

2. द्विपद बंटन का समान्तर माध्य तथा मानक विचलन (Mean and Standard Deviation of Binomial Distribution) :

(उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

(1) सिद्ध कीजिये कि द्विपद बंटन का समान्तर माध्य $m = np$

माना कि सफलता की प्रायिकता p तथा असफलता या 0 सफलता की प्रायिकता q है तथा घटना घटने की संख्या n है। तब 0, 1, 2, ... n सफलताओं की प्रायिकतायें द्विपद $(q + p)^n$ के उत्तरोत्तर पदों के बराबर होती हैं अर्थात्

सफलता (x)	0	1	2	..... n
प्रायिकता (f)	q^n	$nq^{n-1}p$	$\frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2$	..... p^n

$\because$ उपरोक्त द्विपद बंटन असंतत श्रेणी (discrete series) है, अत: इसका समा० माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

$$\Sigma f = q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \ldots + p^n$$

$$= (q + p)^n = (1)^n = 1 \quad (\because p + q = 1)$$

$$\Sigma fx = q^n.0 + nq^{n-1}p.1 + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 2 + \ldots + p^n n$$

$$= nq^{n-1}p + n(n-1)q^{n-2}p^2 + \ldots + np^n$$

$$= np\,[q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p + \ldots + p^{n-1}]$$

$$= np\,(q + p)^{n-1} = np.1 = np$$

$\therefore$ समा० मा०, $m = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{np}{1} = np$ या $m = np$ (सूत्र)

(2) सिद्ध कीजिये कि द्विपद बंटन का मानक विचलन, $\sigma = \sqrt{npq}$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

असंतत श्रेणी के लिए मानक विचलन, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(x - m)^2}{\Sigma f}}$

या $\sigma^2 = \frac{\Sigma f(x-m)^2}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fx^2 - 2\Sigma fx \cdot m + \Sigma f \cdot m^2}{\Sigma f}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - 2m \cdot \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} + m^2 \cdot \frac{\Sigma f}{\Sigma f} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - 2m \cdot m + m^2 \cdot 1 = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - m^2$ ...(1)

$$\Sigma fx^2 = q^n \cdot 0 + nq^{n-1}p \cdot 1^2 + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 \cdot 2^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}q^{n-3}p^3 \cdot 3^2 + \ldots + p^n \cdot n^2$$

$$= nq^{n-1}p + 2n(n-1)q^{n-2}p^2 + \frac{3n(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^3 + \ldots + n^2p^n$$

$$= np\,[q^{n-1} + 2(n-1)q^{n-2}p + \frac{3(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^2 + \ldots + np^{n-1}]$$

$$= np\,[\{q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^2 + \ldots + p^{n-1}$$

$$+ \{(n-1)q^{n-2}p + 2\frac{(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^2 + \ldots + (n-1)p^{n-1}\}]$$

$$= np\,[(q+p)^{n-1} + (n-1)p\,\{q^{n-2} + (n-2)q^{n-3}p + \ldots + p^{n-2}\}].$$

$$= np\,[(1)^{n-1} + (n-1)p\,(q+p)^{n-2}]$$

$$= np\,[1 + (n-1)p \times 1 = np\,[1 + np - p] = np\,(q + np) = npq + n^2p^2$$

$$\Sigma f = q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \ldots + p^n = (q+p)^n = 1$$

(1) में Σfx^2 तथा Σf के मान रखने पर, $\sigma^2 = \frac{npq + n^2p^2}{1} - m^2 = npq + n^2p^2 - n^2p^2$ $(\because m = np)$

$= npq \Rightarrow \sigma = \sqrt{npq}$ (सूत्र)

द्विपद बंटन का माध्य, $m = np$ तथा माध्य विचलन $\sigma = \sqrt{npq}$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 8. एक द्विपद बंटन में समान्तर माध्य 3 तथा मानक विचलन $\sqrt{2}$ है। बंटन में 0, 3, 6 सफलताओं की प्रायिकतायें ज्ञात करो।

हल : समान्तर माध्य, $m = np = 3$ तथा $\sigma^2 = npq = 2 \Rightarrow q = \frac{npq}{np} = \frac{2}{3}, p = 1 - q = \frac{1}{3}, n = \frac{np}{p} = 9$

$$0 \text{ सफलता की प्रायिकता} = {}^9C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^9 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{2^9}{3^9} \times 1 = \frac{512}{19683} = 0.026$$ उत्तर

$$3 \text{ सफलताओं की प्रायिकता} = {}^9C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{2^6}{3^6} \times \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{3 \times 4 \times 7 \times 2^6}{3^9} = \frac{5376}{19683} = 0.273$$ उत्तर

$$6 \text{ सफलताओं की प्रायिकता} = {}^9C_6 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1}{3^6}$$

$$= \frac{3 \times 4 \times 7 \times 2^3}{3^9} = \frac{672}{19683} = 0.034$$ उत्तर

उदाहरण 9. यदि किसी चर के मान क्रमशः 0, 1, 2, 3, ...n है और बारम्बारता के मान क्रमशः द्विपद गुणांकों 1, ${}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3 ....., {}^nC_n$ के अलग-अलग अनुपाती हों तो सिद्ध करिये कि माध्य $\frac{n}{2}$ है। (उ० प्र० डिप्लोमा 1990)

हल :

चर (x) :	0	1	2	3	.....n
बारम्बारता (f) :	${}^nC_0$	${}^nC_1$	${}^nC_2$	${}^nC_3$	.....${}^nC_n$

$\because$ $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$\because$ $$\Sigma f = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + ... + {}^nC_n = 2^n$$

तथा $$\Sigma fx = {}^nC_0.0 + {}^nC_1.1 + {}^nC_2.2 + {}^nC_3.3 + ... + {}^nC_n.n$$

$$= {}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + ... + n.{}^nC_n$$

$$= n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + ... + n.1$$

$$= n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + ... + 1\right]$$

$$= n[1+1]^{n-1} = n \times 2^{n-1}$$

$\because$ $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma f(x)}{\Sigma f} = \frac{n \times 2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$$ सिद्धम्

उदाहरण 10. द्विपद बंटन $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^8$ का समान्तर माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिये।

हल : $q = \frac{2}{5}, p = \frac{3}{5}, n = 8$

समान्तर माध्य, $m = np = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$ उत्तर

मानक विचलन, $\sigma = \sqrt{(npq)} = \sqrt{8 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{4 \times 1.732}{5} = 1.386$ उत्तर

उदाहरण 11. किसी द्विपद बंटन का माध्य 8 तथा विचरण 9 है। क्या ये तथ्य सही है? (उ० प्र० डिप्लोमा 2001)

हल : माध्य $= np = 8$ तथा विचरण $\sigma^2 = npq = 9, \frac{npq}{np} = \frac{9}{8} \Rightarrow q = \frac{9}{8} > 1$

लेकिन q का मान 1 से अधिक नहीं हो सकता, अतः दिये हुए आँकड़े सही नहीं हैं। उत्तर

अभ्यासमाला 20 (1)

1. यदि एक प्रयास में सफलता मिलने की प्रायिकता $\frac{2}{3}$ हो तो 5 प्रयासों में 3 सफलतायें प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
2. 12 खराब वस्तुओं में से 3 खराब वस्तुयें आने की प्रायिकता क्या है यदि वस्तु के खराब होने की प्रायिकता 5% है।
3. एक सिक्के को 8 बार उछाला गया। (i) कोई शीर्ष न आने की, (ii) 3 शीर्ष आने की, (iii) कम से कम 5 शीर्ष आने की, (iv) अधिक से अधिक 3 शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
4. यदि एक सिक्का 12 बार उछाला जाये तो (i) 4 शीर्ष, (ii) अधिकतम 4 शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 94, 2011)
5. 7 पासों को एक साथ उछाला गया। (i) 4 पासों पर, (ii) अधिक से अधिक 4 पासों पर, (iii) 4 से अधिक पासों पर अंक 2 या 4 आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
6. एक खेल में A द्वारा खेल जीतने का संयोगानुपात 3 : 4 है। A द्वारा 6 खेलों में से (i) 3 खेलों में, (ii) कम से कम 3 खेलों में जीतने की प्रायिकता ज्ञात करो।
7. जानवरों में एक विशेष रोग के फैलने की सम्भावना 40% है। 6 जानवरों को पहले से ही दवाई दे देने से यह पाया गया है कि उनमें से कोई भी जानवर बीमार नहीं हुआ। इस परीक्षण की प्रायिकता ज्ञात करो।
8. एक उद्योगशाला के कर्मचारियों में व्यवसायिक रोग फैलने की सम्भावना 20% है। 6 में से 4 या 4 से अधिक कर्मचारियों के रोगी होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
9. 10 सिक्कों को 1000 बार उछाला गया है। कितनी बार 6 शीर्ष तथा 4 टेल आने की आशा की जा सकती है?
10. 7 सिक्कों को 1024 बार उछाला गया है। कितनी बार आप आशा करते हैं कि कम से कम 4 शीर्ष अवश्य आयेंगे?
11. 7 सिक्कों को 128 बार उछाला गया। प्रत्येक उछाल में शीर्षों की संख्या नोट कर ली गई। परिणाम निम्न तालिका में दिये गये है–

शीर्षों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6	7
उछालों की संख्या	1	6	19	35	30	23	7	1

द्विपद बंटन का आसंजन कीजिये। माध्य तथा मानक विचलन के सिद्धान्तक मान क्या हैं? प्रेक्षित बारम्बारता से भी माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात करो।

12. एक घनाकार डाई 6 के समूह में काफी बार फेंकी जाती है। 3 या 4 का अंक आने की घटना को सफलता घोषित किया गया है। समूहों के कितने अनुपात में तुम 4 सफलतायें प्राप्त करने की आशा करते हो?
13. 6 डाईयों को 729 बार फेंका गया है। आप कितनी बार कम से कम तीन डाइयों पर 5 अथवा 6 आने की आशा करते हो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2009)

संकेत : $P(r) = \sum_{r=3}^{6} N.{}^nC_r q^{n-r} p^r; N = 729, p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}, n = 6$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

14. यदि किसी मशीन द्वारा बनाये गये बोल्ट 10% त्रुटिपूर्ण हैं तो 5 बोल्टों में से, जो कि यादृच्छिक रूप से निकाले गये हैं (i) कोई त्रुटिपूर्ण नहीं है, (ii) एक त्रुटिपूर्ण है। (iii) अधिक से अधिक एक बोल्ट के त्रुटिपूर्ण होने की सम्भावनायें ज्ञात कीजिये। (उ० प्र० डिप्लोमा 2000)

संकेत : $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, q = \frac{9}{10}, n = 5$ $p(0), [p(1), p(0) + p(1)]$ ज्ञात करो।

15. 8 सिक्कों को एक साथ उछाला गया है। सिद्ध करो कि कम से कम 6 शीर्ष प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{37}{256}$ है। (उ० प्र० डिप्लोमा 1995)

16. एक द्विपद बंटन में समान्तर माध्य 4 तथा मानक विचलन $\sqrt{3}$ है। 0, 4, 8 सफलताओं की प्रायिकतायें ज्ञात कीजिये।

17. यदि प्रत्येक 10 आने वाले जहाजों में एक क्षतिग्रस्त हो जाता है तब 5 आने वाले जहाजों में से 4 को सुरक्षित आने की प्रायिकता ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)

18. एक त्रुटिपूर्ण बोल्ट की सम्भाविता $\frac{1}{10}$ है। 400 बोल्टों में त्रुटिपूर्ण बोल्टों के बंटन के लिए माध्य ज्ञात करो।

संकेत : $n = 400, p = \frac{1}{10}, m = np = 400 \times \frac{1}{10} = 40$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1995)

19. एक द्विपद बंटन के लिए माध्य 6 और मानक विचलन $\sqrt{2}$ है। बंटन के सभी पदों को लिखो। (उ० प्र० डिप्लोमा 1995)

संकेत : $m = np = 6, \sigma^2 = npq = 2$; इससे $q = \frac{1}{3}, p = \frac{2}{3}, n = 9$ अब $(q+p)^n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^9$ का विस्तार करो।

20. एक द्विपद बंटन का माध्य 2 तथा मानक विचलन 5 है। क्या यह कथन सही है? (उ० प्र० डिप्लोमा 1993)

21. एक कम्पनी द्वारा बनाये गये कलमों के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता 1/10 है। यदि ऐसे 12 कलम बनाये जाते हों तो प्रायिकता ज्ञात करो कि (i) ठीक दो कलम दोषपूर्ण हैं। (ii) कम से कम दो कलम दोषपूर्ण हैं। (iii) कोई भी कलम दोषपूर्ण नहीं है। (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)

22. प्रत्येक 4 बच्चों वाले 800 परिवारों में से कितने परिवार सम्भावित होंगे जिनमें (i) 2 लड़के तथा 2 लड़कियाँ हैं। (ii) कम से कम एक लड़का है। (iii) कोई लड़का नहीं है। (iv) अधिक से अधिक 2 लड़कियाँ हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2008, 10)

उत्तरमाला 20 (1)

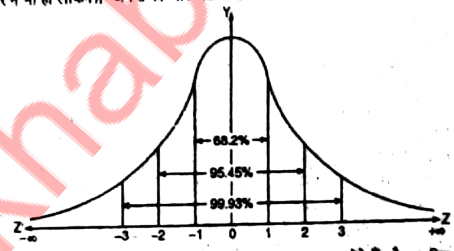
1. 0.33
2. $^{12}C_3 \cdot (0.95)^9 \cdot (0.05)^3$
3. $\frac{1}{256}, \frac{7}{32}, \frac{93}{256}, \frac{93}{256}$
4. $\frac{495}{4096}, \frac{397}{2048}$
5. $\frac{280}{2187}, \frac{232}{243}, \frac{11}{243}$
6. 0.2938, 0.5148
7. 0.0467
8. $\frac{53}{3125}$
9. 205
10. 512
11. अनुमानित बारम्बारतायें क्रमशः = 1, 7, 21, 35, 21, 7, 1 ; $\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}$
12. $\frac{20}{243}$
13. 233
14. (i) 0.59049 (ii) 0.32805 (iii) 0.91854
16. $\left(\frac{3}{4}\right)^{16}, {}^{16}C_4 \frac{3^{12}}{4^{16}}$
17. $\frac{6561}{20000}$
18. 40
19. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^9$
20. नहीं
21. (i) $\frac{22}{27}\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$ (ii) $\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{12}\right]$ (iii) $\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$
22. (i) 300 (ii) 750 (iii) 50 (iv) 550

(2) प्रसामान्य बंटन (NORMAL DISTRIBUTION)

3. **प्रसामान्य बंटन वक्र (Normal Distribution Curve) :**

जैसा कि द्विपद बंटन में बताया गया है कि 0, 1, 2, 3, ..., n सफलताओं की बारम्बारतायें द्विपद $N(q+p)^n$ के विस्तार से प्राप्त पदों के मानों के बराबर होती हैं लेकिन यदि $p = q$ हो तो द्विपद विस्तार से सममित बारम्बारता बंटन (Symmetrical frequency distribution) प्राप्त होता है, और यदि n का मान बहुत बड़ा है अर्थात् यदि n अनन्त की ओर अग्रसर है तब बारम्बारताओं का परिकलन (Calculation) बहुत ही कठिन हो जाता है। इस कठिनाई का समाधान प्रसामान्य वक्र (Normal curve) के प्रयोग से किया गया है जो $(q+p)^n$ से प्राप्त बारम्बारताओं को किसी उचित पैमाने पर, ग्राफ पेपर पर, अंकित करने से प्राप्त होता है।

यह वक्र घण्टे के आकार वाला पूर्ण सरल सममित वक्र (Perfectly symmetrical bell- shaped curve) होता है क्योंकि p तथा q के बराबर होने पर बारम्बारता बंटन भी सममित (Symmetrical) होता है जैसा कि चित्र 2.1 में दिखाया गया है और यदि p तथा q बराबर न भी हों लेकिन n अनन्त की ओर अग्रसर है तब भी लगभग सरल सममित वक्र ही बनता है।



इस वक्र की माध्य, माध्यिका तथा बहुलक (Mean, Median and Mode) बराबर होते हैं और सममित अक्ष (Symmetrical Axis) पर स्थित होते हैं। इसीलिए इस वक्र को प्रसामान्य वक्र (Normal curve) कहते हैं।

इस वक्र का नीचे दिये गये गणितीय समीकरण से प्राप्त बंटन, प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution) कहलाता है।

याद करने योग्य बातें (Aid To Memory)

1. प्रसामान्य वक्र (Normal curve) का गणितीय समीकरण, $y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ (सूत्र-1)

जहाँ x = प्रसामान्य चर, m = बंटन का माध्य, σ = बंटन का मानक विचलन, $e = 2.7183$, $\sqrt{2\pi} = 2.5066$, y = बिन्दु x पर वक्र की कोटि, N = बंटन के पदों की संख्या

2. यदि $N = 1$, तब $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ (सूत्र-2)

3. $\frac{x-m}{\sigma}$ को प्रायः z से निरूपित किया जाता है तथा इसे मानक एकक (Standard unit) या मानक प्रसामान्य चर (Standard normal variate) कहते हैं। इस प्रकार मानक एकक, $z = \frac{x-m}{\sigma}$ (सूत्र-3)

4. सूत्र (2) में $\frac{x-m}{\sigma} = z$ रखने पर, प्रसामान्य वक्र का समी० $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ (सूत्र-4)

5. यदि माध्य, मूल बिन्दु पर स्थित है अर्थात् यदि $m = 0$, तो सूत्र (2) से, $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ (सूत्र-5)

6. $m = 0$ तथा $\sigma = 1$ लेने पर, प्रसामान्य वक्र का समी०, $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (सूत्र-6)

इसे मानक प्रसामान्य बंटन (Standard normal distribution) कहते हैं।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4. प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल (Area under Normal Curve) :

कोटियों $x = x_1, x = x_2$ तथा x-अक्ष के बीच परिबद्ध क्षेत्रफल,

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx$$

$$\frac{x-m}{\sigma} = z \text{ रखने पर } \frac{1}{\sigma}dx = dz \text{ या } dx = \sigma\,dz$$

जब $x = x_1,\ z = \frac{x_1 - m}{\sigma} = z_1$ (मान लो) तथा जब $x = x_2, z = z_2$

इससे, $$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2} \sigma\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2}\,dz$$ (सूत्र)

निम्नलिखित तालिका में z के 0 से 4.0 तक के मानों के लिए क्षेत्रफलों के मान दिये गये हैं। अत: तालिका से अभीष्ट क्षेत्रफल की गणना की जा सकती है।

z (+ve या –ve)	क्षेत्रफल	z +ve या –ve	क्षेत्रफल	z +ve या –ve	क्षेत्रफल
0.0	.0000	1.4	.4192	2.8	.4674
0.1	.0398	1.5	.4332	2.9	.4981
0.2	.0793	1.6	.4452	3.0	.4987
0.3	.1179	1.7	.4555	3.1	.4990
0.4	.1554	1.8	.4641	3.2	.4993
0.5	.1915	1.9	.4713	3.3	.4995
0.6	.2258	1.96	.4750	3.4	.4996
0.7	.2580	2.0	.4773	3.5	.4997
0.8	.2881	2.1	.4821	3.6	.4998
0.9	.3159	2.2	.4861	3.7	.4999
1.0	.3413	2.3	.4893	3.8	.49993
1.1	.3643	2.4	.4918	3.9	.49995
1.2	.3849	2.5	.4938	4.0	.49997
1.3	.4032	2.6	.4953		
1.333	.4084	2.7	.4965		

नोट : z के किसी धनात्मक तथा उतने की ऋणात्मक मान के लिए क्षेत्रफल एक ही होता है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. प्रसामान्य वक्र $y = y_0 e^{-x^2/2\sigma^2}$ के गुण लिखिये। (उ० प्र० डिप्लोमा 2003, 04)

हल : प्रसामान्य वक्र (Normal Curve) के गुण–

1. प्रसामान्य वक्र $y = y_0 e^{-x^2/2\sigma^2}$ द्वारा निरूपित प्रायिकता घनत्व शून्य या शून्य से अधिक होता है।
2. प्रसामान्य प्रायिकता वक्र के अन्तर्गत x-अक्ष के ऊपर का सम्पूर्ण क्षेत्रफल एक के बराबर होता है।

3. प्रसामान्य वक्र अपने माध्य (mean) के सापेक्ष सममित (symmetrical) होता है।
4. इस बंटन के माध्य, माध्यिका तथा बहुलक संपाती होते हैं (mean, median and mode are coincident)।

उदाहरण 2. राम और श्याम ने एक परीक्षा में, जिसका माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 80 और 8 है, क्रमशः 60 तथा 88 अंक प्राप्त किये। उनके मानक अंक ज्ञात कीजिये।

हल : (i) राम के लिए, $m = 80, \sigma = 80,\ x = 60,\ z = ?$

$$z = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{60-80}{8} = \frac{-20}{8} = -2.5$$ उत्तर

(ii) श्याम के लिये, $m = 80, \sigma = 8, x = 88, z = ?$

$$z = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{88-80}{8} = \frac{8}{8} = 1$$ उत्तर

उदाहरण 3. दो परीक्षार्थियों ने एक परीक्षा में 70 तथा 45 अंक प्राप्त किये। यदि उनके मानक अंक क्रमशः 1.5 तथा – 2.5 हैं तो माध्य तथा मानक विचलन के मान ज्ञात करो।

हल : $\because z = \frac{x-m}{\sigma} \therefore 1.5 = \frac{70-m}{\sigma} \Rightarrow 1.5\sigma = 70 - m$ ...(i)

तथा $-2.5 = \frac{45-m}{\sigma} \Rightarrow -2.5\sigma = 45 - m$ ...(ii)

(i) से (ii) को घटाने पर, $4\sigma = 25$ या $\sigma = 6.25$ उत्तर

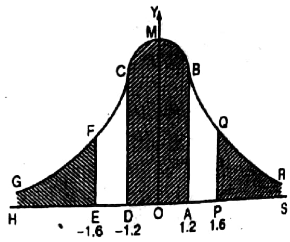
(i) से, $1.5 \times 6.25 = 70 - m$

$\Rightarrow m = 70 - 9.375 = 60.625$ उत्तर

उदाहरण 4. देहली के एक पब्लिक स्कूल के 500 छात्रों की आयु का माध्य 18 वर्ष तथा मानक विचलन 5 वर्ष है। ज्ञात कीजिये
(i) कितने छात्रों की आयु 12 और 24 वर्ष के बीच है? (ii) कितने छात्रों की आयु 10 वर्ष के कम है?
(iii) कितने छात्रों की आयु 26 वर्ष से अधिक है?

हल : (i) $$z_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{12-18}{5} = -1.2$$

$$z_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma} = \frac{24-18}{5} = +1.2$$



अभीष्ट छात्रों की संख्या का अनुपात

$= (z_1 = 1.2$ तथा $z_2 = -1.2$ के बीच का क्षेत्रफल $ABMCD)$

$= 2 \times (z = 0$ से $z = 1.2$ के बीच का क्षेत्रफल $OABM)$

$= 2 \times 0.38493 = 0.76986$

$\therefore$ अभीष्ट छात्रों की संख्या $= 500 \times 0.76986 = 385$ छात्र उत्तर

(ii) $$z = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{10-18}{5} = \frac{-8}{5} = -1.6$$

अभीष्ट छात्रों की संख्या का अनुपात $= [z = -1.6$ से बायीं ओर का क्षेत्रफल $EFGH]$

$= [(z = 0$ से बायीं ओर का क्षेत्रफल $OMGH) - (z = 0$ से $z = -1.6$ के बीच का क्षेत्रफल $OMFE)]$

$= 0.5 - 0.4452 = 0.0548$ उत्तर

$\therefore$ अभीष्ट छात्रों की संख्या $= 500 \times 0.0548 = 27.40 = 27$ छात्र

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(iii) $z = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{26 - 18}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$

अभीष्ट छात्रों की संख्या का अनुपात = (z = 1.6 से दायीं ओर का क्षेत्रफल $PQRS$)

= [(z = 0 से दायीं ओर का क्षेत्रफल $OMRS$) − (z = 0 से z = 1.6 के बीच का क्षेत्रफल $OMQP$)]

= 0.5 − 0.4452 = 0.0548

ऐसे छात्रों की अभीष्ट संख्या = 500 × 0.0548 = 27.40 = 27 छात्र

उत्तर

नोट : (i) प्रसामान्य वक्र के नीचे का पूरा क्षेत्रफल एक इकाई के बराबर होता है। सममित अक्ष OY के प्रत्येक ओर का क्षेत्रफल 0.5 के बराबर है।

(ii) z = 0 से z = 1.2 का क्षेत्रफल 0.38493 पृष्ठ 27 पर दी गई तालिका से लिया गया है। प्रश्न में प्रयोग किये गये अन्य क्षेत्रफल भी उसी तालिका से लिये गये हैं।

उदाहरण 5. 300 विद्यार्थियों की ऊँचाइयों के प्रसामान्य बंटन में माध्य 160 सेमी० तथा मानक विचलन 6 सेमी० है। यदि t = 1.50 के संगत प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल 0.4332 हो तो बताइये कि कितने विद्यार्थी (i) 151 सेमी० से कम (ii) 151 और 169 सेमी० के बीच की ऊँचाई के हैं? (उ० प्र० डिप्लोमा 1996)

हल : प्रश्न में मानक एकक को z की बजाय t से निरूपित किया गया है लेकिन हल में z का ही प्रयोग किया गया है।

(i) m = 160 सेमी०, σ = 6 सेमी०, x = 15 सेमी०

$$z = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{151 - 160}{6} = \frac{-9}{6} = -1.5$$

151 सेमी० से कम विद्यार्थियों की संख्या

= 300 × (z = − 1.5 के बायीं ओर का क्षेत्रफल)

= 300 × [(z = 0 के बायीं ओर का क्षेत्रफल) − (z = 0 से z = − 1.5 के बीच का क्षेत्रफल)]

= 300 × (0.5 − 0.4332) (∵ z = 1.5 पर क्षे० = 0.4332 दिया है)

= 300 × 0.0668 = 20.04 = 20 विद्यार्थी

उत्तर

(ii) $z_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{151 - 160}{6} = \frac{-9}{6} = -1.5$, $z_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma} = \frac{169 - 160}{6} = \frac{9}{6} = +1.5$

151 तथा 169 सेमी० के बीच के विद्यार्थियों की संख्या

= 300 × (z = − 1.5 से z = + 1.5 के बीच का क्षेत्रफल)

= 300 × 2 × (z = 0 से z = 1.5 के बीच का क्षेत्रफल)

= 600 × 0.4332 = 259.92 = 260 विद्यार्थी

उत्तर

5. प्रसामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल तथा प्रायिकता में सम्बन्ध :

हम जानते हैं कि किसी घटना के घटने या न घटने की प्रायिकताओं का योग 1 होता है। प्रसामान्य वक्र तथा z-अक्ष के बीच का क्षेत्रफल भी 1 के बराबर होता है। अतः यह क्षेत्रफल किसी घटना के घटने तथा न घटने की प्रायिकताओं के योग को निरूपित करेगा। अतः z_1 तथा z_2 के बीच का क्षेत्रफल संगत प्रायिकता के बराबर होगा, अर्थात्

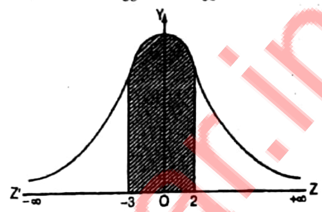
$$P(r) = \int_{z_1}^{z_2} y\,dz \quad \text{जहाँ } (z_2 < z < z_1)$$

यह तथ्य नीचे के उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगा।

उदाहरण 6. एक बल्ब बनाने वाली फैक्ट्री में बनाये गये बल्बों के जीवन काल का माध्य 1000 घण्टे तथा मानक विचलन 60 घण्टे है। बल्बों के 820 से 1120 घण्टे तक जलते रहने की प्रायिकता बताओ।

हल : $z_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{820 - 1000}{60} = \frac{-180}{60} = -3.0$

$z_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma} = \frac{1120 - 1000}{60} = \frac{120}{60} = +2.0$



बल्बों के 820 से 1120 घण्टे तक जलते रहने की प्रायिकता

= z = + 2 से z = − 3 के बीच का क्षेत्रफल

= (z = 0 से z = 2 के बीच का क्षेत्रफल) + (z = 0 से z = − 3 के बीच का क्षेत्रफल)

= 0.4773 + 0.4987 (परिच्छेद 4 की तालिका से)

= 0.9760 = 0.98 = 98%

उत्तर

उदाहरण 7. किसी नगर के निवासियों के जीवित रहने का माध्य 40 वर्ष तथा मानक विचलन 10 है तो 20 वर्ष से 60 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता ज्ञात करो। कितने व्यक्ति 70 वर्ष से अधिक जीवित रहेंगे?

दिया है : z = 2 पर क्षे० = 0.4772 तथा z = 3 पर क्षे० = 0.4986

हल : (i) हमें 20 < x < 60 के लिए प्रायिकता ज्ञात करनी है।

$z_1 = \frac{20 - 40}{10} = \frac{-20}{10} = -2$, $z_2 = \frac{60 - 40}{10} = \frac{20}{10} = +2$

20 से 60 वर्ष तक जीवित रहने वाले व्यक्तियों की संख्या

= (z_1 = + 2 से z_2 = − 2 के बीच का क्षेत्रफल) = 2 × (z = 0 से z = 2 के बीच का क्षेत्रफल)

= 2 × 0.4772 = 0.9544 = 95.44%

उत्तर

(ii) 70 वर्ष से अधिक जीवित रहने की प्रायिकता : $z = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{70 - 40}{10} = 30$

∴ 70 वर्ष से अधिक जीवित रहने वाले व्यक्तियों की संख्या

= (z = 3 से दायीं ओर का क्षेत्रफल)

= (z = 0 से दायीं ओर का क्षेत्रफल) − (z = 0 से z = 3 के बीच का क्षेत्रफल)

= 0.5 − 0.4986 = 0.0014 = 0.14%

उत्तर

उदाहरण 8. यदि प्रसामान्य बंटन का माध्य 40 तथा मानक विचलन 4 हो तो प्रसामान्य बंटन की 35 < x < 45 के लिये प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

हल : $z_1 = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{35 - 40}{4} = \frac{-5}{4} = -0.125$

$z_2 = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{45 - 40}{4} = \frac{5}{4} = +0.125$

अभीष्ट प्रायिकता = [z = − 1.25 से z = + 1.25 के बीच का क्षेत्रफल]

= 2 × [z = 0 से z = 1.25 के बीच का क्षेत्रफल]

= 2 × 0.3944 [∵ सारणी से z (1.25) = 0.3944]

= 0.7888

उत्तर

Scanned by CamScanner

उदाहरण 9. एक मशीन से 1000 पीतल के प्लग तैयार तकिये गये। यदि उनके व्यासों का समान्तर माध्य 1.905 सेमी० तथा मानक विचलन 0.005 सेमी० हो तथा व्यासों का प्रसामान्य बंटन (Normal distribution) हुआ हो तो कितने प्लग खराब होंगे जबकि (1.91 ± 0.01) सेमी० व्यास उपयुक्त है ?

हल : $m = 1.905$ तथा $\sigma = 0.005$, व्यास $1.91 - 0.01 = 1.90$ सेमी० से $1.91 + 0.01 = 1.92$ सेमी० तक सही है।

$$z_1 = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{1.90 - 1.905}{0.005} = \frac{-.005}{0.005} = -1.0$$

$$z_2 = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{1.92 - 1.905}{0.005} = \frac{0.015}{0.005} = +3.0$$

सही प्लगों की संख्या = 1000 × [$z = -1$ से $z = +3$ के बीच का क्षेत्रफल]

= 1000 × [($z = -1$ से $z = 0$) + ($z = 0$ से $z = 3$) तक का क्षेत्रफल

= 1000 × [0.3413 + 0.4987]

= 1000 × 0.8400 = 840

∴ खराब प्लग = 1000 − 840 = 160 उत्तर

नोट : क्षेत्रफल अनुच्छेद 4 की सारणी से प्राप्त किये गये हैं।

उदाहरण 10. प्रसामान्य बंटन मानते हुए 100 विद्यार्थियों की कक्षा में कितने विद्यार्थियों ने प्रथम श्रेणी (> 60%) प्राप्त की होगी यदि उनके प्राप्तांकों का समान्तर माध्य 44 तथा मानक विचलन 10 है।

हल : $x = 60$, $z = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{60-44}{10} = 1.6$

चूँकि 60 अथवा 60 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करनी है अतः क्षेत्रफल $z = 1.6$ से दायीं ओर का अर्थात् $z = \infty$ तक का लेना है।

∴ अभीष्ट विद्यार्थियों की संख्या = 100 × [$z = 1.6$ से $z = \infty$ के बीच का क्षेत्रफल]

= 100 × [0.5 − ($z = 0$ से $z = 1.6$ के बीच का क्षेत्रफल)]

= 100 × [0.5 − 0.4452] = 100 × 0.0548

= 5.48 = 6 विद्यार्थी उत्तर

नोट—चित्र में y-अक्ष के दायीं ओर का कुल क्षेत्रफल 0.5 है। अतः 1.6 से आगे ∞ तक का क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिए 0.5 में से $z = 0$ से $z = 1.6$ के बीच का क्षेत्रफल घटाया गया है।

उदाहरण 11. एक मशीन 20% खराब बोल्ट बनाती है। प्रायिकता ज्ञात करो कि 400 बोल्टों के नमूने में (i) अधिक से अधिक 60 बोल्ट खराब हैं (ii) 90 से अधिक खराब हैं।

हल : $p = 20\% = 0.2, q = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8,$

$m = np = 400 \times 0.2 = 80; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8} = 8$

(i) 60 बोल्ट से अधिक खराब न होने की प्रायिकता के लिए, $z = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{60-80}{8} = \frac{-20}{8} = -2.5$

∴ अभीष्ट प्रायिकता = ($z = -2.5$ के बायीं ओर का क्षेत्रफल)

= 0.5 − ($z = 0$ से $z = -2.5$ तक का क्षेत्रफल)

= 0.5 − 0.4938 = 0.0062 उत्तर

(ii) 90 बोल्ट से अधिक खराब होने की प्रायिकता के लिए, $z = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{90-80}{8} = \frac{10}{8} = 1.25$

∴ अभीष्ट प्रायिकता = ($z = 1.25$ से $z = 1.25$ तक का क्षेत्रफल)

= 0.5 − ($z = 0$ से $z = 1.25$ तक का क्षेत्रफल)

= 0.5 − 0.3944 = 0.1056 उत्तर

उदाहरण 12. निम्न आँकड़ों पर प्रसामान्य वक्र का आसंजन कीजिये।

अन्तराल :	0 – 10	10 – 20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता :	6	8	3	2	1

हल :

अन्तराल	x	f	$f \times x$	$m = \frac{340}{20} = 17$ $x - m$	$(x-m)^2$	$f \times (x-m)^2$
0–10	5	6	30	− 12	144	864
10–20	15	8	120	− 2	4	32
20–30	25	3	75	8	64	192
30–40	35	2	70	18	324	648
40–50	45	1	45	28	784	784
–	–	20	340	–	–	2520

$$m = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{340}{20} = 17, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-m)^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{2520}{20}} = 11.2$$

अभीष्ट वक्र का समीकरण, $y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$

$$= \frac{20}{11.2 \times \sqrt{2\pi}} e^{-(x-17)^2/2 \times 126}$$ उत्तर

अभ्यासमाला 20 (2)

1. दो छात्रों ने एक परीक्षा में क्रमशः 72 तथा 27 अंक प्राप्त किये जबकि माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 44 तथा 6 हैं। उनके मानक अंक ज्ञात कीजिये।
2. दो विद्यार्थियों ने एक परीक्षा में 80 तथा 50 अंक प्राप्त किये। यदि उनके मानक अंक क्रमशः 2.5 तथा − 1.5 हैं तो माध्य तथा मानक विचलन के मान ज्ञात करो।
3. एक सी०पी०एम०टी० परीक्षा में किसी छात्र ने रसायन शास्त्र और जीव विज्ञान में क्रमशः 152 और 172 अंक प्राप्त किये जबकि उनके मानक मान − 2.5 और 2.5 हैं। परीक्षा में औसत और मानक विचलन के मान ज्ञात करो। (उ० प्र० डिप्लोमा 2003)
4. 1000 बच्चों की बुद्धि परीक्षा का माध्य 42 तथा मानक विचलन 24 था। (i) 50 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले बच्चों की संख्या ज्ञात करो, (ii) 30 और 54 के बीच अंक प्राप्त करने वाले बच्चों की संख्या ज्ञात करो।
5. 4000 व्यक्तियों की आय का समान्तर माध्य 750 रुपये प्रतिमाह तथा मानक विचलन 50 रुपये है। कितने प्रतिशत व्यक्तियों की आय (i) 668 रुपये से अधिक है (ii) 832 रुपये से अधिक है।
6. किसी परीक्षा में 23% विद्यार्थियों ने 60 से अधिक अंक प्राप्त किये और 21% विद्यार्थियों ने 40 से कम अंक प्राप्त किये। प्राप्तांकों का समान्तर माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात करो।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

7. एक ट्यूब लाइट बनाने वाली कम्पनी ने विज्ञापन में ट्यूबों के जीवन काल का माध्य 1200 घण्टे तथा मानक विचलन 80 घण्टे किया है। ट्यूबों के 960 से 1380 घण्टे तक जलते रहने की प्रायिकता ज्ञात करो।

8. किसी प्रसामान्य बंटन का माध्य 60 तथा मानक विचलन 5 है। $50 < x < 70$ के लिए बंटन की प्रायिकता ज्ञात करो।

9. 500 विद्यार्थियों ने गणित की परीक्षा दी। उनके प्राप्तांकों का समान्तर माध्य 56 तथा मानक विचलन 20 है। यह मानते हुये कि प्राप्तांकों में प्रसामान्य बंटन हुआ है, ज्ञात कीजिये कि कितने विद्यार्थियों ने प्रथम श्रेणी के अर्थात् 60 अथवा 60 से अधिक अंक प्राप्त किये हैं।

10. यदि $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ तो निम्नलिखित के मान ज्ञात करो—

(i) $\int_{-1.2}^{0} \phi(z)\, dz$ (ii) $\int_{1.2}^{2.4} \phi(z)\, dz$

(iii) $\int_{-1.8}^{1.8} \phi(z)\, dz$ (iv) $\int_{-2.5}^{0.5} \phi(z)\, dz$

11. एक फैक्ट्री के बनाये गये ब्लेडों के भारों का समान्तर माध्य 1.95 ग्राम तथा मानक विचलन 0.05 है। यदि भारों में प्रसामान्य बंटन हुआ हो तो ज्ञात कीजिये कि 100 ब्लेडों के एक पैकेट में (i) कितने ब्लेडों का भार 2 ग्राम या 2 ग्राम से अधिक होगा, (ii) 2.05 ग्राम अथवा इससे अधिक भार वाले कितने ब्लेड होंगे?

12. निम्न आंकड़ों पर प्रसामान्य वक्र का आसंजन कीजिए:

विद्यार्थी :	5	4	6	3	2
प्राप्तांक :	5	15	20	35	45

13. निम्न आंकड़ों पर प्रसामान्य वक्र का आसंजन कीजिए:

आकार :	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
बारम्बारता :	10	14	8	2	16

14. 100 शुष्क बैट्री सैलों की जाँच उनका जीवन मापन करने के लिये किया गया जिससे परिणाम $\bar{x} = 12$ घण्टे तथा $\sigma = 3$ घण्टे प्राप्त हुये। यह मानते हुये कि आंकड़े प्रसामान्य वितरित हैं, कितने प्रतिशत बैट्री सैल का जीवनकाल (i) 15 घन्टे से अधिक, (ii) 6 घन्टे से कम, (iii) 10 घन्टे से 14 घन्टे के मध्य होगा? (उ० प्र० डिप्लोमा 2004)

उत्तरमाला 20 (2)

1. 4.66, – 2.83 2. 61.25, 7.5 3. 4; 4 4. 3.371, 383
5. 95%, 5% 6. 50.13, 12.81 7. 0.98 8. 0.9544
9. 210 10. (i) 0.3849 (ii) 0.1069 (iii) 0.9282 (iv) 0.6853
11. (i) 16 (ii) 2 12. $\frac{1.6}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-20)^2/3150}$
13. $\frac{50}{6.25\sqrt{2\pi}} e^{-(x-18)^2/76.8}$
14. (i) 15.87% (ii) 2.28% (iii) 49.08%

(3) प्वॉयसन बंटन (Poisson Distribution)

प्वॉयसन बंटन द्विपद बंटन का सीमान्त रूप है। इस बंटन के अनुसार r सफलताओं की प्रायिकता

$$P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!} \quad \text{(सूत्र)}$$

से ज्ञात की जाती है। m को प्वॉयसन बंटन का माध्य (mean) कहते हैं।
$r = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$ रखने पर $0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$ सफलताओं की जो प्रायिकतायें प्राप्त होती हैं, वे नीचे दी गई हैं:

सफलता (r) :	0	1	2	3	..... r	..... ∞
प्रायिकता (p) :	e^{-m}	me^{-m}	$\frac{m^2e^{-m}}{2!}$	$\frac{m^3e^{-m}}{3!}$	..... $\frac{m^re^{-m}}{r!}$	..... ∞

प्वॉयसन बंटन का समान्तर मध्य m है तथा मानक विचलन $\sqrt{m}$ है।

यदि प्रयोग N बार दोहराया गया है, तब द्विपद बंटन की भाँति इस बंटन की अनुमानित बारम्बारतायें $\frac{Nm^re^{-m}}{r!}$ से प्राप्त होती है।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. किसी बारम्बारता वितरण का समान्तर माध्य 2 है। प्वॉयसन बंटन द्वारा 0, 1, 2, 3, 4 सफलतायें प्राप्त करने की प्रायिकतायें ज्ञात करो। ($e^{-2} = 0.1353$)

हल: प्वॉयसन बंटन से, $P(r) = \frac{m^re^{-m}}{r!}$ यहाँ पर, $m = 2$ तथा $r = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर,

$$P(0) = \frac{2^0 \times e^{-2}}{0!} = \frac{1 \times 0.1353}{1} = 0.1353 \quad \text{उत्तर}$$

$$P(1) = \frac{2^1 \times e^{-2}}{1!} = \frac{2 \times 0.1353}{1} = 0.2706 \quad \text{उत्तर}$$

$$P(2) = \frac{2^2 \times e^{-2}}{2!} = \frac{4 \times 0.1353}{2} = 0.2706 \quad \text{उत्तर}$$

$$P(3) = \frac{2^3 \times e^{-2}}{3!} = \frac{8 \times 0.1353}{3} = 0.1804 \quad \text{उत्तर}$$

$$P(4) = \frac{2^4 \times e^{-2}}{4!} = \frac{16 \times 0.1353}{4} = 0.0902 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. निम्न आँकड़ों पर प्वॉयसन बंटन का आसंजन कीजिये—

चर (x) :	0	1	2	3	4
बारम्बारता (f) :	109	65	22	3	1

(उ०प्र० डिप्लोमा 2001)

हल: प्वॉयसन बंटन का आसंजन करने के लिए हमें दी हुई श्रेणी का समान्तर माध्य ज्ञात होना चाहिये। चूँकि श्रेणी असंतत है,

$$\therefore \quad m = \frac{\Sigma f(x)}{\Sigma f} = \frac{109 \times 0 + 65 \times 1 + 22 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4}{109 + 65 + 22 + 3 + 1} = \frac{122}{200} = 0.61$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\Sigma fx^2 = 0 + 1 \times 65 + 4 \times 22 + 9 \times 3 + 16 \times 1 = 196$$

विचरण $\sigma^2 = \frac{\Sigma (f.x^2)}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f.x}{\Sigma f}\right)^2 = \frac{196}{200} - \left(\frac{122}{200}\right)^2 = 0.61$

$\Rightarrow$ माध्य = विचरण $\therefore$ बंटन प्वायसन बंटन है।

अब, $P(r) = \frac{N m^r e^{-m}}{r!} = \frac{200 \times (0.61)^r \times e^{-0.61}}{r!}$ $(\because N = \Sigma f = 200)$

$= \frac{200 \times (0.61)^r \times 0.5434}{r!}$ ($\because$ सारणी से $e^{-0.61} = 0.5434$)

$= \frac{108.68 \times (0.61)^r}{r!}$

इसमें, $r = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर,

$$P(0) = \frac{108.68 \times (0.61)^0}{0!} = \frac{108.68 \times 1}{1} = 108.68$$

$$P(1) = \frac{108.68 \times (0.61)^1}{1!} = \frac{108.68 \times 0.61}{1} = 66.29$$

$$P(2) = \frac{108.68 \times (0.61)^2}{2!} = \frac{108.68 \times 0.37}{2} = 20.11$$

$$P(3) = \frac{108.68 \times (0.61)^3}{3!} = \frac{108.68 \times 0.23}{6} = 4.16$$

$$P(4) = \frac{108.68 \times (0.61)^4}{4!} = \frac{108.68 \times 0.14}{24} = 0.64$$

अतः प्वॉयसन बंटन निम्न प्रकार है :

चर (x)	0	1	2	3	4
बारम्बारता (f)	109	65	22	3	1
प्वॉयसन बंटन की बा० (P)	108.68	66.29	20.11	4.16	0.64

उत्तर

उदाहरण 3. एक पुस्तक के 120 पृष्ठों पर 120 त्रुटियाँ हैं। प्वॉयसन बंटन का प्रयोग करके बताइये कि यादृच्छया से देखे गये एक पृष्ठ पर (i) 2 त्रुटियाँ, (ii) अधिक से अधिक 2 त्रुटियाँ, (iii) कम से कम दो त्रुटियाँ मिलने की प्रायिकता क्या है?

हल : m = समान्तर माध्य = प्रति पृष्ठ त्रुटियों की संख्या = $\frac{\text{कुल त्रुटियाँ}}{\text{कुल पृष्ठ}} = \frac{120}{120} = 1$

$$P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!} = \frac{(1)^r e^{-1}}{r!} = \frac{0.3679}{r!}$$

(i) 2 त्रुटियाँ मिलने की प्रायिकता, $p(2) = \frac{0.3679}{2!} = 0.1839$ उत्तर

(ii) अधिक से अधिक 2 त्रुटियाँ मिलने की प्रायिकता, $P(r \le 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= \frac{0.3679}{0!} + \frac{0.3679}{1!} + \frac{0.3679}{2!} = 0.3679[1 + 1 + 1/2]$

$= 0.3679 \times 2.5 = 0.9198$ उत्तर

(iii) कम से कम 2 त्रुटियाँ मिलने की प्रायिकता,

$P(r > 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0.3679 - 0.3679 = 0.2642$ उत्तर

उदाहरण 4. एक प्वॉसयन बंटन में प्रायिकता $P(r), r = 0$ के लिए 10% है। बंटन का माध्य ज्ञात करो।

हल : $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$ जब $r = 0$, $P(r) = P(0) = \frac{10}{100} = 0.1$ (दिया है)

$\therefore$ $0.1 = \frac{m^0 e^{-m}}{0!} \Rightarrow 0.1 = \frac{1 \times e^{-m}}{1} \Rightarrow e^{-m} = 0.1$

$-m \log e = \log 0.1 = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{\log e} = \frac{1}{0.4343} = 2.303$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि किसी कम्पनी द्वारा बनाये गये बल्बों में 1% बल्ब खराब हों तो 400 बल्बों के नमूने में (i) 3 बल्ब, (ii) 3 और 5 के बीच बल्ब खराब होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : $p = 1\% = \frac{1}{100}$, $n = 400$, $m = np = 400 \times \frac{1}{100} = 4$

(i) 3 बल्ब खराब होने की प्रायिकता, $P(3) = \frac{4^3 \times e^{-4}}{3!}$ $\left[\because P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}\right]$

$= \frac{64 \times 0.0183}{6} = 0.1952$ उत्तर

(ii) 3 और 5 के बीच बल्बों के खराब होने की प्रायिकता $= P(3) + P(4) + P(5)$

$= \frac{4^3 \times e^{-4}}{3!} + \frac{4^4 \times e^{-4}}{4!} + \frac{4^5 \times e^{-4}}{5!}$

$= \frac{4^3 \times e^{-4}}{6}\left[1 + \frac{4}{4} + \frac{16}{20}\right]$

$= \frac{64 \times 0.0183}{6} \times \frac{14}{5} = 0.5465$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि किसी इन्जेक्शन से खराब प्रतिक्रिया (reaction) की सम्भाविता 0.001 है तो 2000 व्यक्तियों में से दो से अधिक को खराब प्रतिक्रिया होने का संयोग ज्ञात करो जबकि $e = 2.718$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2011)

हल : $p = 0.001$, $n = 2000$ $\therefore$ $m = np = 2000 \times 0.001 = 2$

दो से अधिक व्यक्तियों को खराब प्रतिक्रिया होने की प्रायिकता $= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$

$\because$ $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$ $\therefore$ $P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2}$,

$P(1) = \frac{2^1 \times e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$, $P(2) = \frac{2^2 \times e^{-2}}{2!} = 2e^{-2}$

$P(0) + P(1) + P(2) = e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} = 5e^{-2} = 5 \times (2.718)^{-2} = \frac{5}{(2.718)^2} = 0.6770$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 1 - 0.6770 = 0.3230$ उत्तर

उदाहरण 7. एक कम्पनी के स्विच बोर्ड पर 2 बजे से 4 बजे की बीच में फोन आने की संख्या 2.5 प्रति मिनट है। एक विशेष मिनट के बीच में (i) फोन न आने की सम्भाविता (ii) 3 फोन आने की सम्भाविता ज्ञात करो।

दिया है : $e^{-2} = 0.13534$ और $e^{-0.5} = 0.60650$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1992)

हल : चूंकि प्रति मिनट फोन आने की संख्या 2.5 है, अतः फोन आने का माध्य, $m = 2.5$

$\because$ प्रति मिनट r फोन आने की सम्भाविता, $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$ (सूत्र)

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

∴ किसी विशेष मिनट में फोन बिल्कुल न आने की सम्भाविता

$$P(0) = 0 \text{ सफलता की प्रायिकता} = \frac{m^0 e^{-m}}{0!}$$
$$= \frac{(2.5)^0 \times e^{-2.5}}{1} = 1 \times (e^{-2} \times e^{-0.5})$$
$$= 1 \times 0.13534 \times 0.60650 = 0.0821$$ उत्तर

तीन फोन आने की सम्भाविता, $P(3)$ = तीन सफलताओं की प्रा० $= \frac{m^3 e^{-m}}{3!}$

$$= \frac{(2.5)^3 \times e^{-2.5}}{3!} = \frac{15.625 \times 0.0821}{6} = 0.2138$$ उत्तर

उदाहरण 8. 70 वर्ष की आयु के एक व्यक्ति की एक वर्ष के अन्दर मर जाने की प्रायिकता 0.02 है। प्रायिकता ज्ञात करो कि 12 व्यक्तियों में से कम से कम 10 व्यक्ति अपना 71 वां जन्मदिन मना सकेंगे। $(e^{-0.24} = 0.7866)$

हल: व्यक्ति के 1 वर्ष के अन्दर मर जाने की प्रायिकता, $p = 0.02$

व्यक्तियों की कुल संख्या, $n = 12$ ∴ $m = np = 12 \times .02 = .24$

कम से कम 10 व्यक्तियों के जीवित रहने की प्रायिकता ज्ञात करनी है जो 0, 1, अथवा 2 व्यक्तियों के मर जाने की प्रायिकता के बराबर होगी। अतः सूत्र $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$ से

0 व्यक्ति के मरने की प्रायिकता, $P(0) = \frac{(0.24)^0 \times e^{-0.24}}{0!} = 1 \times 0.7866 = 0.7866$

1 व्यक्ति के मरने की प्रायिकता, $P(1) = \frac{(0.24)^1 \times e^{-0.24}}{1!} = 0.24 \times 0.7866 = 0.1887$

2 व्यक्तियों के मरने की प्रायिकता, $P(2) = \frac{(0.24)^2 \times e^{-0.24}}{2!} = \frac{0.0576 \times 0.7866}{2 \times 1} = 0.0226$

कम से कम 10 व्यक्तियों द्वारा 71वां जन्मदिन मना लेने की प्रायिकता

= (0 व्यक्ति +1 व्यक्ति +2 व्यक्तियों) के 71 वें वर्ष में मरने की प्रायिकता

$= 0.7866 + 0.1888 + 0.0226 = 0.9980$ उत्तर

अभ्यासमाला 20 (3)

1. एक त्रुटिपूर्ण बोल्ट की सम्भाविता $\frac{1}{10}$ है। 400 बोल्टों में त्रुटिपूर्ण बोल्टों के बंटन के लिए माध्य ज्ञात कीजिये। (उ० प्र० डिप्लोमा 1997)
2. किसी बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य 4 है। प्वॉयसन बंटन द्वारा 0, 1, 2, 3, 4 सफलतायें प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो जबकि $e^{-4} = 0.0183$
3. एक कम्पनी द्वारा बनाये गये विद्युत बल्बों में 3% बल्ब दोषयुक्त हैं। प्वॉयसन बंटन का प्रयोग कर प्रायिकता ज्ञात करो कि 100 बल्बों में (i) कोई बल्ब खराब नहीं है (ii) केवल एक बल्ब खराब है, (iii) कम से कम एक बल्ब खराब है।
4. 200 फ्यूजों के बक्से में अधिक से अधिक 5 फ्यूज खराब होने की प्रायिकता ज्ञात करो जबकि 2% फ्यूज खराब हैं। (उ० प्र० डिप्लोमा 2008)

   संकेत: $n = 200, p = \frac{2}{100}, m = np = 200 \times \frac{2}{100} = 4$, अब अधिक से अधिक 5 फ्यूज खराब होने की प्रायिकता

   $= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$, जहाँ $P(r) = \frac{m^r . e^{-m}}{r!}$

5. 80 वर्ष की आयु में एक व्यक्ति के 1 वर्ष में मर जाने की प्रायिकता 0.05 है। इसकी प्रायिकता क्या होगी कि ऐसे 5 व्यक्तियों में से कम से कम 4 व्यक्ति अपना 81वां वर्ष मना सकेंगे? $(e^{-0.25} = 0.7788)$
6. यदि किसी इन्जैक्शन से खराब प्रतिक्रिया (reaction) होने की सम्भाविता 0.002 है तो 1000 व्यक्तियों में से दो से अधिक व्यक्तियों को खराब प्रतिक्रिया होने का संयोग ज्ञात करो जबकि $e = 2.718$.
7. किसी विशेष रोग के फैलने से मरने की दर 1000 में से 5 पाई गई। 400 के समूह में से ठीक 5 के मर जाने की प्रायिकता ज्ञात करो जबकि $e = 2.718$.
8. प्वॉयसन बंटन से प्रायिकता ज्ञात करो कि यदि ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचा जाये और 104 प्रयास किये जायें तो कम से कम एक बार हुक्म का इक्का आये।
9. रेज़र ब्लेड बनाने वाली किसी फैक्ट्री में ब्लेड के त्रुटिपूर्ण होने की सम्भावना 1/500 है। प्रत्येक पैकेट में 10 ब्लेड हैं। प्वॉयसन बंटन का प्रयोग करके निकटतम मान तक बताइये कि 1000 पैकिटों में से कितने पैकिट हैं जिनमें (i) कोई ब्लेड त्रुटिपूर्ण नहीं है (ii) एक त्रुटिपूर्ण है (iii) दो त्रुटिपूर्ण होने की सम्भावना है। दिया है $(e^{-0.02} = 0.9802)$ (उ० प्र० डिप्लोमा 1989)
10. एक व्यापारी को रात्रि में 8 से 10 बजे की बीच प्रति मिनट 1.5 फोन आते हैं। प्रायिकता ज्ञात करो कि (i) किसी विशेष मिनट में कोई फोन न आये (ii) केवल एक फोन आये (iii) दो या दो से अधिक फोन आयें। $(e^{-1} = 0.3678, e^{-0.5} = 0.6065)$
11. एक बीमा कम्पनी ने पाया कि जनसंख्या का 0.01 प्रतिवर्ष किसी निश्चित दुर्घटना का शिकार होता है। जनसंख्या से कम्पनी के 1000 बीमा धारक यादृच्छया चुने जाते हैं। अगले वर्ष ज्यादा से ज्यादा दो बीमा धारकों के दुर्घटनाग्रस्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। दिया है। $e^{-0.1} = 0.90481$ (उ० प्र० डिप्लोमा 2002)
12. यह मानते हुए कि सप्ताह के दिनों में अपरान्ह 2 से 3 बजे के बीच की गई 15 टेलीफोन कॉलों में से औसतन एक टेलिफोन व्यस्त होता है। यदि 6 टेलीफोन नम्बर यादृच्छिया मिलाये जाते हैं तो क्या प्रायिकता होगी कि (i) तीन से अधिक व्यस्त न हों। (ii) कम से कम तीन व्यस्त होंगे। (उ० प्र० डिप्लोमा 2007)

    संकेत: $p = \frac{1}{15}, q = \frac{14}{15}, n = 6$; (i) $P = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$,

    (ii) $P = P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$
13. निम्न आँकड़ों पर प्वॉयसन बंटन का आसंजन कीजिये—

चर (x) :	0	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता (f) :	4	14	23	23	18	9	9

14. निम्न आँकड़ों पर प्वायसन बंटन का आसंजन करो।

मृत्यु :	0	1	2	3	4
बारम्बारता :	122	60	15	2	1

(उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 10)

उत्तरमाला 20 (3)

1. 40
2. 0.0183; 0.0732; 0.1464; 0.1952; 0.1952
3. 0.05 ; 0.15 ; 0.95
4. 0·814
5. 0.9732
6. 0.3230
7. 0.0361
8. 0.864
9. 980; 20; 0
10. 0.223; 0.3345; 0.4425
11. 0·99981
12. (i) 0.9997 (ii) 0.0051
13. अनुमानित बारम्बारतायें क्रमशः 5; 15; 22.5; 16.9; 10.1; 5.06
14. 122; 61, 15, 2.5, 0, 0.312

www.polytechnicnagar.in

Scanned by CamScanner

21 न्यूनतम वर्ग विधि एवं वक्र आसंजन

(Method of Least Squares and Curve Fitting)

1. वक्र आसंजन (Curve Fitting) :

वक्र आसंजन का अर्थ है एक ऐसा बीजगणितीय व्यंजक ज्ञात करना जो दो चरों (variables) के बीच सम्बद्धता (relation) प्रदान करता है।

यदि हमने किसी प्रयोग द्वारा स्वतन्त्र चर x के n मानों के लिए आश्रित चर y के n संगत मान (corresponding values) प्राप्त किये हैं तो उन प्राप्त x तथा y के n युग्मों (pairs) $(x_1, y_1), (x_3, y_2)$ ..... (x_n, y_n) से एक बीजगणितीय समीकरण ज्ञात की जाती है जो रैखिक अथवा n घातीय समीकरण होती है और तब उस समीकरण द्वारा बिना प्रयोग किये x के किसी अन्य मान के लिए y का संगत मान प्राप्त कर सकते हैं।

बीजगणितीय समीकरण को प्राप्त करना ही वक्र आसंजन (Curve Fitting) कहलाता है। वक्र का आसंजन सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक दोनों तरह से अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है।

वक्र आसंजन के लिए जिस विधि का प्रयोग करते हैं उसे न्यूनतम वर्ग विधि (The Method of Least Squares) कहते हैं। इस विधि से वक्र आसंजन के लिए कुछ समीकरणें प्रयोग की जातीं हैं जिन्हें प्रसामान्य समीकरणें (normal equations) कहते हैं। विधि का वर्णन अगले अनुच्छेद में किया गया है।

2. न्यूनतम वर्ग विधि (The Method of Least Squares) :

माना कि किसी प्रयोग को n बार सम्पादित किया जाता है और उससे $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$ के n युग्म (pairs) प्राप्त होते हैं और हमें $y = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n$ प्रकार का वक्र आसंजन करना है।

वक्र आसंजन के के लिए निम्न समीकरणों का प्रयोग करते हैं—

$$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + \ldots + k\Sigma x^n$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 + \ldots + k\Sigma x^{n+1}$$
$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 + \ldots + k\Sigma x^{n+2}$$

....

....

$$\Sigma x^n y = a\Sigma x^n + b\Sigma x^{n+1} + c\Sigma x^{n+2} + \ldots + k\Sigma x^{n+n}$$

इन समीकणों को प्रसामान्य समीकरणें (normal equations) कहते हैं। यहाँ यह नहीं बताया गया है कि ये समीकरणें कहां से या कैसे प्राप्त हुई हैं। विद्यार्थियों को इसकी आवश्यकता भी नहीं है। प्रसामान्य समीकरणों की संख्या $(n + 1)$ होती है अर्थात्

(i) यदि रैखिक वक्र (Linear Curve) है और $y = a + bx$ रूप की सरल रेखा का आसंजन करना है तों दो निम्न प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) का प्रयोग करते हैं :

$$\Sigma y = na + b\Sigma x$$
$$\Sigma xy = n\Sigma x + b\Sigma x^2$$

(ii) यदि द्विघातीय वक्र (second degree curve) है और $y = a + bx + cx^2$ रूप का परवलय (parabola) आसंजित करना है तो निम्न तीन प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग करते हैं :

$$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$$
$$\Sigma xy = n\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$$
$$\Sigma x^2 y = n\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$$

इसी प्रकार त्रिघातीय वक्र अर्थात् $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ के लिये चार सामान्य समीकरणों का प्रयोग करते हैं।

अज्ञात राशियों $a, b, c, \ldots, k$ के मानों को ज्ञात करने के लिए $\Sigma x, \Sigma x^2, \Sigma x^3, \Sigma y, \Sigma x^2 y, \ldots$ आदि के मान ज्ञात करते हैं जिनके लिए एक तालिका (table) बनाई जाती है जैसा कि आगे उदाहरणों में दिखाया गया है। अज्ञात राशियों के मान प्राप्त हो जाने पर उन्हें अभीष्ट आसंजित वक्र के समीकरण में रख दिया जाते है। यह सब आगे प्रकाशक उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगा।

प्रकाशक उदाहरण

उदाहरण 1. न्यूनतम वर्ग विधि के प्रयोग से, निम्नलिखित आंकड़ों (data) के लिये सरल रेखा $y = ax + b$ का आसंजन कीजिए।

x	−1	0	2	3	6
y	−1	2	9	10	15

हल : सरल रेखा $y = ax + b$ आसंजित करने के लिए निम्नलिखित प्रसामान्य समीकरणें (normal equations) का प्रयोग करो।

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \qquad \ldots(1)$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad \ldots(2)$$

a तथा b के मान ज्ञात करने के लिए निम्न तालिका का प्रयोग करो।

क्रम संख्या	x	y	xy	x^2
1	−1	−1	1	1
2	0	2	0	0
3	2	9	18	4
4	3	10	30	9
5	6	15	90	36
$n = 5$	$\Sigma x = 10$	$\Sigma y = 35$	$\Sigma xy = 139$	$\Sigma x^2 = 50$

www.polytechnichub.in

Scanned by CamScanner

ये मान समीकरणों (1) तथा (2) में रखने पर

$$35 = 5a + 9b$$
$$139 = 10a + 50b$$

हल करने पर, $a = \frac{399}{32} = 2{\cdot}494,\ b = \frac{69}{32} = 2.156$

अभीष्ट आसंजित रेखा का समीकरण, $y = 2.494 + 2.156x$ उत्तर

उदाहरण 2. एक घिरनी के द्वारा W भार उठाने के लिए P बल लगाना पड़ता है। रैखिक नियम $P = a + bW$ का आसंजन कीजिए जिससे यह ज्ञात किया जा सके कि किसी ज्ञात भार को उठाने के लिए कितना बल लगाना पड़ेगा।

प्रयोग द्वारा W तथा P में निम्न आंकड़े प्राप्त हुए हैं—

W	10	50	100	140	200
P	5	20	30	40	60

हल: प्रसामान्य समीकरणें (Normal equations) हैं—

$$\Sigma P = na + b\Sigma W \quad ...(1)$$
$$\Sigma PW = a\Sigma W + b\Sigma W^2 \quad ...(2)$$

a तथा b ज्ञात करने के लिये तालिका :

क्र० सं०	W	P	PW	W^2
1	10	5	50	100
2	50	20	1000	2500
3	100	30	3000	10000
4	140	40	5600	19600
5	200	60	12000	40000
$n = 5$	$\Sigma W = 500$	$\Sigma P = 155$	$\Sigma PW = 21650$	$\Sigma W^2 = 72200$

ये मान समीकरण (1) तथा (2) में रखने पर,

$155 = 5a + 500b$ तथा $21650 = 500a + 72200b$ अर्थात् $433 = 10a + 1444b$

हल करने पर, $a = 3.3$ तथा $b = 0.277$

अभीष्ट आसंजित रैखिक नियम से, $P = a + bW \Rightarrow P = 3.3 + 0.277W$ उत्तर

उदाहरण 3. निम्न आंकड़ों पर द्विघातीय वक्र आसंजित कीजिए—

x :	0	1	2	3	4
y :	1	1.8	1.3	2.5	6.3

हल: माना कि आसंजित किये जाने वाले द्विघातीय वक्र का समीकरण

$$y = a + bx + cx^2 \text{ है।} \quad ...(1)$$

a, b, c के मान ज्ञात करने के लिए प्रसामान्य समीकरणें (normal equations) निम्नलिखित हैं—

$$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \quad ...(2)$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \quad ...(3)$$
$$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 \quad ...(4)$$

क्र० सं०	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	1.8	1	1	1	1.8	1.8
3	2	1.3	4	8	16	2.6	5.2
4	3	2.5	9	27	81	7.5	22.5
5	4	6.3	16	64	256	25.2	100.8
$n = 5$	$\Sigma x = 10$	$\Sigma x = 12.9$	$\Sigma x^2 = 30$	$\Sigma x^3 = 100$	$\Sigma x^4 = 354$	$\Sigma xy = 37.1$	$\Sigma x^2y = 130.3$

ये मान समीकरणों (2), (3) तथा (4) में रखने पर,

$$12.9 = 5a + 10b + 30c \quad ...(5)$$
$$37.1 = 10a + 30b + 100c \quad ...(6)$$
$$130.3 = 30a + 100b + 354c \quad ...(7)$$

समी० (5), (6) तथा (7) को हल करने पर, $a = 1.42,\ b = -1.07,\ c = 0.55$

a, b, c के ये मान समीकरण (1) में रखने पर, अभीष्ट आसंजित वक्र का समीकरण, $y = 1.42 - 1.07x + 0.55x^2$ उत्तर

3. मूल बिन्दु में परिवर्तन (Change of Origin) :

उदाहरण 3 में प्रसामान्य समीकरणों (5), (6) तथा (7) को हल करके a, b, c के मान प्राप्त करने में निश्चित रूप से काफी समय लगा तथा कठिनाई का भी सामना करना पड़ा। ऐसी स्थिति में गणना (Calculation) को सरल करने के लिए, यदि चर x के मानों में समान अन्तराल है ($x, x + h, x + 2h$ ..... रूप का) तथा n (x, y युग्मों की संख्या) विषम है तब मूल बिन्दु को परिवर्तित किया जा सकता है, जिसके अनुसार x के स्थान पर u, जहाँ $u = \frac{x - a}{h}$ लेने पर (a, x श्रेणी का माध्यमान mean value है), नई प्रसामान्य समीकरणें

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

$$\Sigma y = na + b\Sigma u + c\Sigma u^2$$
$$\Sigma uy = a\Sigma u + b\Sigma u^2 + c\Sigma u^3$$
$$\Sigma u^2 y = a\Sigma u^2 + b\Sigma u^3 + c\Sigma u^4$$

हो जायेंगी और $\Sigma u, \Sigma u^3, \Sigma u^5, ...$ के मान शून्य प्राप्त होंगे जिससे प्रसामान्य समीकरणों को हल करना आसान हो जायेगा। यह सब अगले उदाहरण में दिखाया गया है।

उदाहरण 4. निम्न आंकड़ों के लिए द्विघातीय परवलय का आसंजन करो–

x	0	1	2	3	4
y	1	1.8	3.3	4.5	6.3

हल : आसंजित किये जाने वाले वक्र का समीकरण $y = a + bx + cx^2$ ...(1)

प्रसामान्य समीकरणें (normal equations)

$$\Sigma y = an + b\Sigma u + c\Sigma u^2 \quad ...(2)$$
$$\Sigma uy = a\Sigma u + b\Sigma u^2 + c\Sigma u^3 \quad ...(3)$$
$$\Sigma u^2 y = a\Sigma u^2 + b\Sigma u^3 + + c\Sigma u^4 \quad ...(4)$$

जहाँ $u = \frac{x-a}{h} = \frac{x-2}{1}$ लेने पर ($\because$ मध्य मान $a = 2$ तथा x श्रेणी में अन्तराल 1 है)

a, b, c ज्ञात करने के लिए तालिका–

x	$u = \frac{x-2}{1}$	y	u^2	uy	u^3	u^4	u^2y
0	−2	1	4	−2	−8	16	4
1	−1	1.8	1	−1.8	−1	1	1.8
2	0	3.3	0	0	0	0	0
3	1	4.5	1	4.5	1	1	4.5
4	2	6.3	4	12.6	8	16	25.2
$n = 5$	$\Sigma u = 0$	$\Sigma y = 16.9$	$\Sigma u^2 = 10$	$\Sigma uy = 13.3$	$\Sigma u^3 = 0$	$\Sigma u^4 = 34$	$\Sigma u^2y = 35.5$

ये मान समीकरण (2), (3) तथा (4) में रखने पर,

$$16.9 = 5a + 0 + 10c \quad ...(5)$$
$$13.3 = 0 + 10b + 0 \quad ...(6)$$
$$35.5 = 10a + 0 + 34c \quad ...(7)$$

समीकरण 6 से, $b = 1.33$ तथा समीकरण 5 तथा (7) को हल करने पर, $a = 3.137, c = 0.12$

परवलय का समीकरण $y = a + bu + cu^2$

$\Rightarrow$
$$y = 3.137 + 1.33(x-2) + 0.12(x-2)^2$$
$$= 3.137 + 1.33x - 2.66 + 0.12x^2 - 0.48x + 0.48$$
$$= 0.957 + 0.85x + 0.12x^2$$
उत्तर

उदाहरण 5. एक कम्पनी में पाँच वर्षों में निम्न प्रकार से लाभ प्राप्त हुआ–

x :	1	2	3	4	5
y :	1250	1500	1650	1950	2350

यह मानते हुये कि उन्नति (growth) परवलयक (parabola) है, द्विघातीय परवलय का आसंजन कीजिए और सातवें वर्ष में होने वाले लाभ की परिकल्पना करो।

हल : माना कि परवलय का समी० $y = a + bx + cx^2$ है। ...(1)

माना कि $X = \frac{x-a}{h} = \frac{x-3}{1}$ [$\because x$ का मध्यमान (midle value) 3 है $\therefore a = 3$] तथा $Y = \frac{y-1650}{50}$ तब प्रसामान्य समीकरणें (normal equations)

$$\Sigma Y = an + b\Sigma X + c\Sigma X^2 \quad ...(2)$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 \quad ...(3)$$
$$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 \quad ...(4)$$

x	X	y	Y	XY	X^2	X^2Y	X^3	X^4
1	1 − 3 = −2	1250	$\frac{1250-1650}{50} = -8$	16	4	−32	−8	16
2	2 − 3 = −1	1400	$\frac{1500-1650}{50} = -3$	3	1	−3	−1	1
3	3 − 3 = 0	1650	$\frac{1650-1650}{50} = 0$	0	0	0	0	0
4	4 − 3 = 1	1950	$\frac{1950-1650}{50} = 6$	6	1	6	1	1
5	5 − 3 = 2	2300	$\frac{2350-1650}{50} = 14$	28	4	56	8	16
	$\Sigma X = 0$		$\Sigma Y = 9$	$\Sigma XY = 53$	$\Sigma X^2 = 10$	$\Sigma X^2Y = 27$	$\Sigma X^3 = 0$	$\Sigma X^4 = 34$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

ये मान (2), (3), (4) में रखने पर,

$$9 = 5a + 0 + 10c \quad ...(5)$$

$$53 = 0 + 10b + 0 \quad ...(6)$$

$$27 = 10a + 0 + 34c \quad ...(7)$$

समीकरण (6) से, $b = 5.3$

समीकरण (5) तथा (7) से, $a = 0.514,\ c = 0{\cdot}643$

समीकरण (1) में a, b, c के मान रखने पर,

$$Y = 0.514 + 5.3X + 0.643X^2$$

$X = x - 3$ तथा $Y = \frac{y - 1650}{50}$ रखने पर,

$$\frac{y - 1650}{50} = 0.514 + 5.3(x - 3) + 0.643(x - 3)^2$$

$\Rightarrow$ $y = 1170.05 + 72.1x + 32.15x^2$

$x = 7$ रखने पर, $y = 1170.05 - 72.1 \times 7 + 32.15 \times 49$

$= 1170.05 - 504.7 + 1575.35 =$ 22[illegible].65 उत्तर

उदाहरण 6. निम्नलिखित समंकों के लिए एक श्रेष्ठ सरल रेखा का आसंजन कीजिए—

x:	0	5	10	15	20	25
y:	16	19	21	26	28	34

हल : यहाँ कुल पद 6 हैं जो कि सम (even) हैं। मानों में सर्वान्तर 5 है। पद सम होने पर, गणना को सरल करने के लिए a का मान दो मध्य पदों का माध्य लेते हैं तथा h का मान भी सर्वान्तर का आधा लेते हैं अर्थात् $\frac{10 + 15}{2} = 12.5$ तथा $h = \frac{5}{2}$ लेने पर,

$X = \frac{x - a}{h} = \frac{x - 12.5}{2.5}$ लो तथा $\because Y = y - 24$ लेने से, $\Sigma Y = 0$ है अतः $Y = y - 24$ लो।

श्रेष्ठ आसंजित सरल रेखा, $Y = a + bX$ ...(1)

जिसके लिए प्रसामान्य समीकरणें,

$$\Sigma Y = an + b\Sigma X \quad ...(2)$$

तथा

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \quad ...(3)$$

x	$X = \frac{x - 12.5}{2.5}$	y	$Y = y - 24$	XY	X^2
0	$\frac{0 - 12.5}{2.5} = -5$	16	−8	40	25
5	$\frac{5 - 12.5}{2.5} = -3$	19	−5	15	9
10	$\frac{10 - 12.5}{2.5} = -1$	21	−3	3	1
15	$\frac{15 - 12.5}{2.5} = 1$	26	2	2	1
20	$\frac{20 - 12.5}{2.5} = 3$	28	4	12	9
25	$\frac{25 - 12.5}{2.5} = 5$	34	10	50	25
	$\Sigma X = 0$		$\Sigma Y = 0$	$\Sigma XY = 122$	$\Sigma X^2 = 70$

ये मान समीकरणों (2) तथा (3) में रखने पर, $0 = 6a + 0 \Rightarrow a = 0$ तथा $122 = 0 + b \times 70 \Rightarrow b = 1.743$

a तथा b के मान समी० (1) में रखने पर,

अभीष्ट सरल रेखा का समी० $Y = 0 + 1.743X \Rightarrow y - 24 = 1.743\left(\frac{x - 12.5}{2.5}\right)$

$\Rightarrow$ $y - 24 = 0.7x - 8.75 \Rightarrow y = 0.7x + 15.25$ उत्तर

अभ्यासमाला 21

1. यदि $\Sigma x = 10$, $\Sigma y = 16.9$, $\Sigma xy = 47.1$, $\Sigma x^2 = 30$ तथा $n = 5$ तो $y = a + bx$ रूप की श्रेष्ठ सरल रेखा का आसंजन कीजिए।
2. न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा बिन्दुओं (5, 8), (10, 6.9), (15, 6.2), (20, 5.0) पर श्रेष्ठ सरल रेखा का आसंजन कीजिए।
3. न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा निम्नलिखित समंकों के लिए $y = ax + bx^2$ रूप के वक्र का आसंजन कीजिए।

x:	−1	0	1	2	3
y:	−3	1	3	2	−1

4. निम्न आंकड़ों के लिए एक श्रेष्ठ सरल रेखा का आसंजन कीजिए।

x:	1	2	3	4	5
y:	2	7	9	10	11

5. निम्न आंकड़ों के लिए द्विघाती श्रेष्ठ परवलय को आसंजित कीजिए।

x:	0	1	2	3	4
y:	1	2	10	22	38

6. निम्न आंकड़ों के लिए द्विघातीय बहुपद (second degree polynomial) का आसंजन कीजिए।

x:	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y:	1.1	1.3	1.6	2.0	2.7	3.4	4.1

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

7. x-श्रेणी के लिए 2002 को मूल बिन्दु मानकर निम्नलिखित आंकड़ों के लिए श्रेष्ठ सरल रेख का आसंजन करो।

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004
उत्पादन (हज़ार टनों में)	14	16	12	14	18

8. $X = x - 2$ तथा $Y = y - 25$ लेकर निम्न आंकड़ों से द्विघातीय वक्र $y = a + bx + cx^2$ का आसंजन कीजिए।

x:	0	1	2	3	4
y:	20	22	25	28	32

9. x को स्वतन्त्र चर लेते हुए निम्नलिखित समंकों के लिए द्विघातीय वक्र का आसंजन कीजिए।

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y:	2	6	7	8	10	11	11	10	9

10. y को परतन्त्र चर लेते हुए निम्न समंकों के लिए द्विघातीय परवलय का आसंजन कीजिए।

x:	1	2	3	4	5
y:	1090	1220	1390	1625	1915

उत्तरमाला 21

1. $y = 0.72 + 1.33x$
2. $y = 8.96 - 0.194x$
3. $y = 2.94x - 1.06x^2$
4. $y = 3.9 + 1.5x$
5. $y = 0.64 - 0.28x + 2.42x^2$
6. $y = 1.04 - 0.198x + 0.244x^2$
7. $y = -1186.4 + 0.6x$
8. $y = 19.4 + 3x$
9. $y = -1 + 3.55x - 0.27x^2$
10. $y = 1024 + 40.5x + 27.5x^2$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

IIIrd सैमेस्टर, 2016

अनुप्रयुक्त गणित-II

समय : $2\frac{1}{2}$ घण्टे। | पूर्णांक : 50

नोट—सभी प्रश्न हल कीजिये।

1. निम्नलिखित में किन्हीं चार भागों को हल कीजिये— (4×2=8)

(अ) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, A^2-B^2 का मान ज्ञात कीजिये।

(ब) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy+4x^2=0$ को हल कीजिये।

(स) यदि $y=e^x\sin x$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(द) $L\{e^{2t}\cos 3t\}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(य) एक थैले में 3 लाल तथा 5 हरी गेंद हैं। एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

2. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— (2×5=10)

(अ) अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=\sin(\log x^2)$ को हल कीजिये।

(ब) यदि $y=e^{ax}\sin bx$, सिद्ध कीजिये कि $\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0$

(स) सिद्ध कीजिये कि $\int_0^{\pi/2}\tan^n x\,dx=\frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}, -1<x<1$

3. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिए— (2×5=10)

(अ) एक सिक्के को 12 बार उछाला जाता है।

(i) कम से कम 4 शीर्ष और

(ii) अधिकतम 4 शीर्ष पाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

(ब) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$, A^2+3A का मान ज्ञात करो।

(स) फलन $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— (2×5=10)

(अ) समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\sec ax$ को हल कीजिये।

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

(ब) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}7 & -1 & -1\\ 10 & -2 & 1\\ 6 & 3 & -2\end{bmatrix}$, A^{-1} का मान ज्ञात करो। इसकी सहायता से समीकरणों

$7x-y-z=0,\ 10x-2y+z=8,\ 6x+3y-2z=7$ को हल करो।

(स) यदि $r(t)=5t^2\hat{i}+t\hat{j}+t^3\hat{k}$, तो सिद्ध करो कि

$$\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt=-14\hat{i}-75\hat{j}-15\hat{k}$$

5. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये—

(2×6=12)

(अ) यदि $u_1=\frac{x_2x_3}{x_1}, u_2=\frac{x_3x_1}{x_2}, u_3=\frac{x_1x_2}{x_3}$, जैकोबियन $J(u_1,u_2,u_3)$ का मान ज्ञात कीजिये।

(ब) दिखाइए कि $\int_s(ax\hat{i}+by\hat{j}+cz\hat{k}).\hat{n}\,ds=\frac{4}{3}\pi(a+b+c)$ जहाँ पर s गोले $x^2+y^2+z^2=1$ का पृष्ठ है।

(स) समीकरण $(D^2+9)y=\cos 2t$ को लाप्लास रूपान्तरण की सहायता से हल कीजिये जबकि $y(0)=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

IIIrd सैमेस्टर, 2018
अनुप्रयुक्त गणित-II

समय : $2\frac{1}{2}$ घण्टे] **[पूर्णांक : 50**

नोट—सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

1. कोई पाँच भाग हल करो— [5×2= 10]

(क) If $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ तो A^2-AB+B^2 का मान ज्ञात करो।

(ख) हल करो $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$

(ग) हल करो $\sin^{-1}\frac{dy}{dx}=x+y$

(घ) $L\{t^2\cos at\}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(ङ) लाटरी के 1000 टिकट बेचे गये उन टिकटों में 5 इनाम है। यदि एक आदमी ने एक टिकट खरीदा तो प्रायिकता ज्ञात करो कि वह आदमी इनाम जीते।

(च) यदि $\bar{f}=(x^2-y^2)\hat{i}+2xy\hat{j}+(y^2-xy)\hat{k}$ तो div $\bar{f}$ का मान ज्ञात करो।

2. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2×5= 10]

(क) अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$ को हल कीजिये।

(ख) अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये यदि $y=Ae^x+Be^x+C$ जहाँ A, B व C अचर हैं।

(ग) यदि $\bar{r}=a\cos t\hat{i}+a\sin t\hat{j}+at\tan\alpha\hat{k}$ तो $\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

3. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2×5= 10]

(क) फलन $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 5\\ 2 & 4 & -3\end{bmatrix}$ तो A^3+A^2+A का मान ज्ञात कीजिये।

(ब) फलन $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\pi\\ -\cos x, & -\pi\le x\le 0\end{cases}$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिये।

(ग) यदि $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$ तथा $z=r\cos\theta$ तो दिखाओ

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$$

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner

4. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2×5=10]

(क) मान ज्ञात कीजिये $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

(ख) यदि $u=\tan^{-1}\frac{x^2+y^2}{x-y}$ तो दिखाओ कि $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u$

(ग) निम्न आव्यूह की कोटि ज्ञात करो $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 8\end{bmatrix}$

5. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2×5=10]

(क) यदि $u=e^{xyz}$ तो सिद्ध करो

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)\,e^{xyz}$$

(ख) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}\,dxdydz$ का मान ज्ञात कीजिये।

(ग) 60 वर्षीय व्यक्ति के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता 0.65 है। 10 व्यक्तियों में, जो अब 60 वर्षीय हैं कम से कम 7 के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता क्या है?

www.polytechnickhabar.in

Scanned by CamScanner